Décomposition de Dunford algorithmique

Léo Gayral

2017-2018

ref : Risler – Algèbre pour la L3 – p.62, p.176

Lemme 1. Soit $M \in M_d(K)$. Si $M \in GL_d(K)$ alors $M^{-1} \in K[M]$.

Démonstration.
On a $\chi_M = \sum_{k=n}^{d} a_k X^k \in K[X]$ unitaire, avec $a_n \neq 0$. Or $\chi_M(M) = 0$ donc $M^{-1} = -\frac{1}{a_n} \sum_{k=n+1}^{d} a_k M^{k-n-1}$. □

Théorème 1. Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$. Il existe un unique couple $(D, N) \in M_d(\mathbb{C})^2$ tel que $A = D + N$, D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. De plus, D et N sont des polynômes en A.

Existence.
Soit $P = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (X - \lambda)$. On remarque en particulier que $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$, ce qui permet de calculer P sans connaître $\sigma(A)$.

Si le théorème est vérifié, alors quitte à cotrigonaliser D et N on remarque que $\chi_D = \chi_A$, donc P est le polynôme minimal de D. On va en réalité s'inspirer de la méthode de Newton sur les polynômes pour approcher D en tant que racine de P dans $M_d(\mathbb{C})$.

On veut donc définir la suite $\begin{cases} A_0 = A \in M_d(\mathbb{C}) \\ A_{n+1} = A_n - P(A_n) P'(A_n)^{-1} \end{cases}$. Pour ce faire, on va montrer les propriétés suivantes par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n \in \mathbb{C}[A], \exists B_n \in \mathbb{C}[X], P(A_n) = P^{2^n} B_n(A) \text{ et } P'(A_n) \in GL_d(\mathbb{C}) .$$

Commençons par montrer que le dernier point est conséquence des autres. Comme P est à racines simples, $P \wedge P' = 1$ donc $\exists U, V \in \mathbb{C}[X], PU + P'V = 1$.

Si $P(A_n) = P^{2^n} B_n(A)$, alors comme χ_A / P^d on a $PU(A_n)$ nilpotente. Si une matrice N est nilpotente, alors $I - N$ est inversible d'inverse $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} N^k$. On en déduit $P'V(A_n) = I - PU(A_n)$ inversible, d'où $P'(A_n) \in GL_d(\mathbb{C})$.

On a bien $A_0 = A \in \mathbb{C}[A]$ et $P(A_0) = P(A) = P^{2^0}(A)$ $(B_0 = 1)$, ce qui permet d'initialiser la récurrence.

Enfin, si la propriété est vraie au rang n, alors A_{n+1} est bien définie. Par le lemme préliminaire, $P'(A_n)^{-1}$ est bien un polynôme en A_n donc en A, d'où $A_{n+1} \in \mathbb{C}[A]$. En outre, comme on ne considère que des polynômes en A, qui commutent entre eux, on peut appliquer une formule de Taylor polynômiale $P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2 Q(X,Y)$, ce qui nous donne :

$$\begin{array}{rcl} P(A_{n+1}) & = & P(A_n) - P(A_n) P'(A_n)^{-1} \times P'(A_n) \\ & & + P^2(A_n) P'(A_n)^{-2} \times Q\left(A_n, P(A_n) P'(A_n)^{-1}\right) \\ & = & P(A_n) - P(A_n) + P^2(A_n) \times R(A) \\ & = & P^{2^n \times 2} B_n^2(A) \times R(A) \\ & = & \left[P^{2^{n+1}} \times B_n^2 R\right](A) \end{array}$$

On a bien le résultat voulu par récurrence. En particulier, si $n \geq \lceil \log_2(d) \rceil$, χ_A divise P^{2^n} donc $P(A_n) = 0$ d'où $A_{n+1} = A_n$. La suite (A_n) stationne en $D \in \mathbb{C}[A]$, or $P(D) = 0$ et P à racines simples, d'où D diagonalisable. Enfin, on pose :

$$N = A - D = \sum_{k=0}^{n} A_k - A_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} P(A_n) \times P'(A_n)^{-1}$$

qui est une somme finie de nilpotents qui commutent entre eux, donc N nilpotente également. $\square$

Unicité.
On a donc construit deux polynômes $D(A)$ et $N(A)$ qui conviennent ci-dessus. Si (D', N') est une décomposition de Dunford de A, alors on a $D' - D = N' - N$. N' et $N(A)$ commutent donc le terme de droite est nilpotent. D' et $D(A)$ commutent, sont codiagonalisables, donc le terme de gauche est diagonalisable. Or la seule matrice diagonale nilpotente est 0. D'où $D' = D(A)$ et $N' = N(A)$. $\square$