Théorème de compacité du calcul propositionnel

Léo Gayral

2017-2018

ref : ?

Théorème 1. Soient $\mathcal{V}$ un ensemble de variables et $\mathcal{G}$ un ensemble de formules finiment satisfiable. Alors $\mathcal{G}$ est satisfiable.

Démonstration.

On utilise l'axiome du choix pour obtenir une énumération $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$ de $\mathcal{V}$, où β est un ordinal. Notons que dans le cas où $\mathcal{V}$ est dénombrable, par définition, cette énumération par $\omega = \mathbb{N}$ existe indépendamment de l'axiome du choix.

On va construire $(\epsilon_\alpha) \in \{0,1\}^\beta$ par induction, en vérifiant la propriété :

$$\mathcal{P}(\alpha) : \forall \mathcal{H} \subset \mathcal{G} \text{ fini}, \exists \sigma : \mathcal{V} \to \{0,1\}, \sigma \vDash \mathcal{H}, \forall \gamma < \alpha, \sigma\left(x_\gamma\right) = \epsilon_\gamma \,.$$

L'initialisation $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse, car $\mathcal{G}$ est finiment satisfiable.

Supposons maintenant $\mathcal{P}(\alpha)$ vraie. Pour obtenir $\mathcal{P}(\alpha+1)$, on distingue deux cas :

- Supposons que pour tout $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ fini, il existe une interprétation telle que $\sigma \vDash \mathcal{H}$ compatible avec $\mathcal{P}(\alpha)$, et de plus $\sigma\left(x_\alpha\right) = 0$. Dans ce cas, avec $\epsilon_\alpha = 0$, la propriété $\mathcal{P}(\alpha+1)$ est vérifiée.
- Sinon, il existe $\mathcal{H}$ fini tel que, pour toute interprétation σ qui satisfait $\mathcal{H}$ compatible avec $\mathcal{P}(\alpha)$, on a nécessairement $\sigma\left(x_\alpha\right) = 1$.
  Dans ce cas, pour toute famille finie $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{E} \cup \mathcal{H}$ est finie, donc satisfaite par une interprétation σ compatible avec $\mathcal{P}(\alpha)$. Comme $\sigma \vDash$

$\mathcal{H}$, par la remarque préalable, $\mathcal{E}$ admet une interprétation compatible avec $\mathcal{P}(\alpha)$, avec $\sigma(x_\alpha) = 1$. Si on pose $\epsilon_\alpha = 1$, la propriété $\mathcal{P}(\alpha+1)$ est vérifiée.

Considérons maintenant un ordinal limite α tel que, pour tout $\beta < \alpha$, $\mathcal{P}(\beta)$ est vrai. Considérons une partie finie $\mathcal{H}$, et $\mathcal{W}$ l'ensemble (fini) des variables de $\mathcal{V}$ des variables d'une formule de $\mathcal{H}$. On note en particulier $\mathcal{W}^- = \{x_\gamma \in \mathcal{W}, \gamma < \alpha\}$ et $\mathcal{W}^+$ son complémentaire.

On pose $\beta = \max \mathcal{W}^- + 1 < \alpha$. On considère une valuation $\sigma \models \mathcal{H}$ compatible avec $\mathcal{P}(\beta)$. Si $\gamma \in [\beta, \alpha[$, on peut changer la valuation $\sigma(x_\gamma)$ sans influer sur $\sigma \models \mathcal{H}$. On peut donc supposer $\sigma(x_\gamma) = \epsilon_\gamma$, d'où σ compatible avec $\mathcal{P}(\alpha)$. □

Application 1. Si $\mathbb{Z}^2$ est finiment pavable, alors il est pavable.

Démonstration.
Commençons par expliciter notre notion de pavage. On considère ici un ensemble fini de tuiles $\mathcal{T}$, ainsi que deux ensembles de règles $H, V \subset \mathcal{T}^2$. On peut placer la tuile τ' à droite de τ lorsque $(\tau, \tau') \in H$, et au dessus de τ lorsque $(\tau, \tau') \in V$.

Ce modèle permet par exemple de décrire les pavages du plan par des tuiles de Wang, dont les bords sont colorés, et ne peuvent être au contact que de bords de même couleur.

On considère alors l'ensemble de variables

$$\mathcal{V} = \left\{ x_{i,j,\tau}, (i,j) \in \mathbb{Z}^2, \tau \in \mathcal{T} \right\}$$

de sorte que $x_{i,j,\tau} = 1$ lorsque la case (i,j) est pavée par τ.

On commence par définir une formule qui caractérise le fait qu'une case (i,j) soit pavée par une unique tuile :

$$C_{i,j} = \bigvee_{\tau \in \mathcal{T}} \left(x_{i,j,\tau} \wedge \left(\bigwedge_{\tau' \neq \tau} \neg x_{i,j,\tau'} \right) \right) .$$

On définit ensuite le test compatibilité de la configuration horizontale de (i,j) à $(i+1,j)$ par

$$H_{i,j} = \bigvee_{(\tau,\tau') \in H} x_{i,j,\tau} \wedge x_{i+1,j,\tau'}$$

et le test vertical par :

$$V_{i,j} = \bigvee_{(\tau,\tau')\in V} x_{i,j,\tau} \wedge x_{i,j+1,\tau'} .$$

Une partie $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}^2$ admet un pavage si et seulement si la famille

$$\{C_{i,j}, (i,j) \in \mathcal{E}\} \cup \{H_{i,j}, (i,j) \text{ et } (i+1,j) \in H\} \cup \{V_{i,j}, (i,j) \text{ et } (i,j+1) \in V\}$$

est satisfiable.

En particulier, toute partie finie de l'ensemble de formules est inclue dans un tel ensemble, associé à une partie finie de $\mathbb{Z}^2$ – qui est pavable – donc cette partie est satisfiable.

Par le théorème de compacité, l'ensemble des formules est satisfiables, et une valuation convenable induit un pavage de $\mathbb{Z}^2$. $\square$