Dév. 26 – Formule de Stirling

Leçons 223 Suites numériques
224 Ex. de dév. asymptotiques
236 Ex. de calculs d'intégrales

Réf : Gourdon

Thm : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

Considérons $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$, déf. pour $n \in \mathbb{N}^*$,

et $v_n = \log\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

$$v_n = \log\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \times \frac{e^{-n+1}}{e^{-n}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \times \frac{n!}{(n+1)!}\right) = \log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \times \frac{1}{e}\right) = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc $\sum_n v_n$ converge, or $\sum_{n=1}^{N} v_n = \log u_{N+1} - \log u_1$, $(\log u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge,

et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k = e^{\lim(\log u_n)}$.

Reste à calculer k.

On utilise les intégrales de Wallis : $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$.

$$\forall n \geq 2,\quad W_n = \left[-\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)(W_{n-2} - W_n) \quad \text{d'où} \quad W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2},$$

or $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, donc
$$W_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n)(2n-2)\dots 2} \times \frac{\pi}{2}$$
$$W_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 1}$$

En outre, $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x) \leq \sin^{2n-1}(x) \leq 1$,

d'où en intégrant : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$ d'où $1 \leq \dfrac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \leq \dfrac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2n}$,

d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = 1$, soit $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (2n+1)\left[\frac{(2n-1)\dots 1}{(2n)\dots 2}\right]^2 \times \frac{\pi}{2} = 1$

$$\text{d'où} \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(2n-1)\dots 1}{(2n)\dots 2}\right]^2 = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{et} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{(2n)\dots 2}{(2n-1)\dots 1}\right]^2 = \pi \quad \text{(formule de Wallis)}$$

Alors $\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)\cdots 2}{(2n-1)\cdots 1}\right]^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{((2\times 1)(2\times 2)\cdots(2\times n))^2}{(2n)!}\right]^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{2^{2n}\, n!}{(2n)!}\right]^2 \sim$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{4n}}{n} \cdot \frac{k^4 n^{4n+2} e^{-4n}}{k^2 (2n)^{4n+1} e^{-4n}} = \frac{k^2}{2}, \qquad \text{d'où} \quad k = \sqrt{2\pi}\,.$$

$\square$