Théorème de Calderon

Michel Davydov

Référence : Polycopié de cours de Thomas Alazard, disponible sur son site
Leçons concernées :

- 201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 202 Exemples de parties denses et applications.
- 213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
- 250 Transformation de Fourier. Applications.
- 234 Espaces $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$. Exemples et applications.

Théorème 1 *Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. L'espace vectoriel engendré par les produits de gradients de fonctions harmoniques sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Soit X l'espace vectoriel engendré par les produits de gradients de fonctions harmoniques sur Ω. Pour montrer que X est dense dans $L^2(\Omega)$, on va utiliser le critère de densité dans un espace de Hilbert.
Soit $f \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall \phi \in X, \int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1}$$

et on veut montrer que $f \equiv 0$, i.e. que $X^\perp = 0$.

Soit $A = \{\rho \in \mathbb{C}^n | \rho \cdot \rho = 0\}$. Alors $\rho \in A \iff |Re(\rho)|^2 - |Im(\rho)|^2 + 2iRe(\rho) \cdot Im(\rho) = 0$. Ainsi, $\rho \in A \iff |Re(\rho)| = |Im(\rho)|$ et $Re(\rho) \cdot Im(\rho) = 0$.

Soient $\eta, \kappa \in \mathbb{R}^n$ tels que $\eta \cdot \kappa = 0$ et $|\eta| = |\kappa|$. Soit $\rho = \kappa - i\eta$. Alors, $\rho \in A$. Posons $u_1(x) = \exp^{i\rho \cdot x}, u_2(x) = \exp^{i\overline{\rho} \cdot x}$. Alors u_1, u_2 sont harmoniques. Cependant, u_1 et u_2 sont des fonctions à valeurs complexes, alors que l'on travaille avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $B = \{Re(\nabla u_1) \cdot Re(\nabla u_2), Re(\nabla u_1) \cdot Im(\nabla u_2), Im(\nabla u_1) \cdot Re(\nabla u_2), Im(\nabla u_1) \cdot Im(\nabla u_2)\}$.

Comme les parties réelle et imaginaire d'une fonction harmonique sont harmoniques, $B \subset X$. Par conséquent, (1) implique

$$\forall \phi \in B, \int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2}$$

Par conséquent

$$\int_\Omega f(x)(\nabla u_1 \cdot \nabla u_2)(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3}$$

On a donc, en explicitant,

$$\int_\Omega f(x)(-\rho\cdot\overline{\rho})u_1(x)u_2(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Par hypothèse sur ρ, on a donc

$$\int_\Omega f(x)(-2|\kappa|^2)e^{2i\kappa\cdot x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Soit χ_Ω la fonction indicatrice de Ω. Alors

$$-2|\kappa|^2\int_{\mathbb{R}^n}(\chi_\Omega f)(x)e^{2i\kappa\cdot x}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

$\chi_\Omega f$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ (car Ω est borné et $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$) donc sa transformée de Fourier $\widehat{\chi_\Omega f}$ est continue. Par (4), $\widehat{\chi_\Omega f}=0$. Par injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$, on en déduit que $\chi_\Omega f=0$, donc $f=0$.

Ainsi, $X^\perp=0$, donc X est dense dans $L^2(\Omega)$.

Remarque 1 *Le même raisonnement permet de montrer que l'espace vectoriel engendré par les produits de fonctions harmoniques est également dense dans* $L^2(\Omega)$.