Théorème d'Ascoli

Théorème
Soient (K, d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une partie de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ des fonctions continues sur K. Sont équivalents :

1. *La partie $\mathcal{A}$ est équicontinue et bornée.*
2. *La partie $\mathcal{A}$ est relativement compacte.*

Démonstration :

- **Supposons que $\mathcal{A}$ soit équicontinue et bornée.**
  Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, et soit $\varepsilon > 0$. Comme l'ensemble $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu sur K compact, il est même équicontinu d'après la forme équicontinue du théorème de Heine, ainsi il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in K$:
  $$\mathrm{d}(x, y) \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$
  On a :
  $$K = \bigcup_{x\in K} \mathrm{B}(x, \delta)$$
  Comme K est compact, d'après la propriété de Borel-Lebesgue il existe $x_1, ..., x_N \in K$ tels que :
  $$K = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{B}(x_i, \delta)$$
  Puisque $\mathcal{A}$ est bornée il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty$ et donc pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on a :
  $$\{f_n(x_i),\ n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\mathrm{D}(0, M)}$$
  et cet ensemble est alors relativement compact. Par le procédé d'extraction diagonale, il existe donc une extractrice $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in [\![1, N]\!]$ la suite $(f_{n_k}(x_i))_{k\in\mathbb{N}}$ converge ; elle donc de Cauchy. Par conséquent il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$ on ait :
  $$k, k' \geq n \Rightarrow |f_{n_k}(x_i) - f_{n_{k'}}(x_i)| \leq \varepsilon.$$
  On pose $n_{\max} = \max\{n_i,\ i \in [\![1, N]\!]\}$.

  Soit $x \in K$, il existe $i_0 \in [\![1, N]\!]$ tel que $x \in \mathrm{B}(x_{i_0}, \delta)$. Pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$ on a :
  $$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k'}}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{i_0})| + |f_{n_k}(x_{i_0}) - f_{n_{k'}}(x_{i_0})| \\ &\quad + |f_{n_{k'}}(x_{i_0}) - f_{n_{k'}}(x)| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $n_{\max}$ est indépendant de x on peut passer à la borne supérieure sur x :

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k'}}\|_\infty \leq 3\varepsilon$$

La suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ qui est complet donc converge vers un élément de $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$.
En conclusion $\mathcal{A}$ est relativement compacte.

- **Supposons que $\mathcal{A}$ soit relativement compacte.**
  Puisque $\overline{\mathcal{A}}$ est compacte donc bornée et par suite $\mathcal{A}$ aussi. Montrons que $\mathcal{A}$ est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$ on a :
  $$\overline{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{f\in\overline{\mathcal{A}}} \mathrm{B}(f,\varepsilon).$$
  Par Borel-Lebesgue il existe $f_1, ..., f_N \in \overline{\mathcal{A}}$ telles que :
  $$\overline{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{B}(f_i,\varepsilon).$$
  Pour tout $i \in [\![1,N]\!]$ les f_i sont uniformément continues d'après le théorème de Heine, par suite il existe $\delta_i > 0$ tel que pour tout $x,y \in K$:
  $$\mathrm{d}(x,y) \leq \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon.$$
  Posons alors $\delta = \min\limits_{i\in[\![1,N]\!]} \delta_i$.
  Soient $x,y \in K$ tels que $\mathrm{d}(x,y) \leq \delta$ et $f \in \mathcal{A}$, il existe $i_0 \in [\![1,N]\!]$ tel que $f \in \mathrm{B}(f_{i_0},\varepsilon)$, alors :
  $$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| \\ &\quad + |f_{i_0}(y) - f(y)| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$
  Donc $\mathcal{A}$ est équicontinue.

$\square$

Référence

- Julien et Laurent Bernis, *Analyse pour l'agrégation.*