Théorème de Gauss-Lucas

Le théorème de Gauss-Lucas

Définition
On appelle enveloppe convexe d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ l'enveloppe convexe de ses racines, on la note $\mathrm{Conv}(P)$.

Théorème (Gauss-Lucas)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. L'enveloppe convexe de P' est incluse dans l'enveloppe convexe de P :

$$\mathrm{Conv}(P') \subset \mathrm{Conv}(P).$$

Démonstration :
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss on peut écrire :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{n_k}$$

où $r \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$ sont les racines deux à deux distinctes de P et $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}^*$ leur multiplicité dans P.
Comme

$$P' = \lambda \sum_{k=1}^{r} n_k (X - \lambda_k)^{n_k - 1} \prod_{l \neq k} (X - \lambda_l)^{n_l},$$

la décomposition en élément simple de P'/P s'écrit :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_k}{X - \lambda_k}.$$

Soit z une racine de P'. Si z est l'une des racines λ_k de P, alors il est clair que $z \in \mathrm{Conv}(P)$. Sinon on peut écrire :

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{z - \lambda_k} = \sum_{k=1}^{r} n_k \frac{\overline{z - \lambda_k}}{|z - \lambda_k|^2}.$$

Soit en passant au conjugué

$$0 = \sum_{k=1}^{r} n_k \frac{z - \lambda_k}{|z - \lambda_k|^2}$$

Et donc

$$z = \frac{\sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}}$$

puisque chaque $\frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}$ est strictement positif.
Cette formule exprime le fait que z est un barycentre à coefficients strictement positifs des λ_k.
Les racines de P' sont donc dans l'enveloppe convexe des racines de P. $\square$

Remarque
Pour tout $v \in \mathbb{C}$ on a :

$$\mathrm{Conv}(P') \subset \mathrm{Conv}(P - v)$$

Un énoncé équivalent ?

Une conséquence du théorème de D'Alembert-Gauss est que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, est surjectif. En effet pour $P \in \mathbb{C}[X]$ et $v \in \mathbb{C}$, le polynôme $P - v$ admet des racines. Une reformulation du théorème de Gauss-Lucas permet de raffiner cette propriété.

Théorème
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, et soient Δ une droite du plan complexe, H_1 et H_2 les deux demi-plans ouverts limités par Δ. Si P' a une racine dans H_1, alors :

$$P(H_1) = \mathbb{C}$$

Démonstration :
Montrons que les deux théorèmes sont équivalents.

- Commençons par montrer ce théorème à l'aide du théorème de Gauss-Lucas. Supposons que $P(H_1) \neq \mathbb{C}$, on peut alors trouver $v \in \mathbb{C}$ tel que $v \notin P(H_1)$. Les racines du polynômes $P - v$ appartiennent donc à $\mathbb{C} \backslash H_1 = \overline{H_2}$. Mais d'après le théorème de Gauss-Lucas les racines de P' sont dans $\mathrm{Conv}(P - v) \subset \overline{H_2}$ puisque $\overline{H_2}$ est convexe. Ce qui contredit l'existence d'une racine de P' dans H_1. On a donc $P(H_1) = \mathbb{C}$.

- Retrouvons le théorème de Gauss-Lucas à partir de ce résultat. On procède à nouveau par l'absurde. On suppose qu'il existe $v \in \mathbb{C}$ tel que $P'(v) = 0$ et $v \notin \mathrm{Conv}(P)$. On peut alors tracer une droite Δ qui sépare le plan complexe en deux demi-plans ouverts H_1 et H_2 tels que $z \in H_1$ et $\mathrm{Conv}(P) \subset H_2$. Par suite pour tout $z \in H_1$, $P(z) \neq 0$, donc $P(H_1) \neq \mathbb{C}$.

Ainsi les deux théorèmes sont bien équivalents. $\square$

Une application

Application
Déterminer les plus grand entier $n \geq 2$ tel que les racines non nulles de $(X + 1)^n - X^n - 1$ soient de module 1.

Preuve :
Si $n = 2$, P a une seule racine 0. Soient $n \geq 3$ et $P_n = (X + 1)^{n+1} - X^n - 1$ on a $P_n' = n(X + 1)^{n-1} - nX^{n-1}$, qui est donc de degré $n - 2$. Soit maintenant z une racine de P_n', z est nécessairement non nul et donc :

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n-1}.$$

Il existe donc $k \in [\![0, n - 2,]\!]$ tel que

$$\frac{z+1}{z} = \exp\left(\frac{2i\pi k}{n-1}\right).$$

En fait $k \neq 0$ car $z + 1 \neq z$. On en déduit que les $n - 2$ racines de p_n' sont les nombres complexes, pour $k \in [\![1, n - 2,]\!]$,

$$z_k = \frac{\exp\left(\frac{-i\pi k}{n-1}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)}.$$

Si toutes les racines de P_n sont de module 1, les racines de P' sont nécessairement dans le disque unité par le théorème de Gauss-Lucas. Or,

$$|z_1| = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right)} > 0,$$

et pour $n \geq 8$ on a

$$2\sin\frac{\pi}{n-1} < 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$$

et $|z_1| > 1$, donc un entier $n \geq$ ne convient pas.
Regardons P_7 ; -1 et 0 sont des racines évidentes donc :

$$\begin{aligned} P_7 &= X(X+1)(7X^4 + 14X^3 + 21X^2 + 14X + 7) \\ &= X(X+1)Q. \end{aligned}$$

On veut écrire $Q = X^2R(X + \frac{1}{X})$ où $R \in \mathbb{R}[X]$; en posant $Y = X + \frac{1}{X}$ on a :

$$\begin{aligned} Q &= X^2\left(7\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) + 14\left(X + \frac{1}{X}\right) + 21\right) \\ &= X^2(7Y^2 - 14 + 14Y + 21) \\ &= 7X^2(Y+1)^2. \end{aligned}$$

Si z est une racine de P_7 non nulle alors $z + \frac{1}{z} + 1 = 0$ ce qui équivaut $z^2 + z + 1 = 0$ et donc à $z = j$ ou $z = j^2$. L'ensemble des racines de P_7 est donc

$$\{0, -1, j, j^2\}.$$

□

Détails Supplémentaires

Proposition
Soient H un espace de Hilbert réel, et $C \subset H$ une partie (non vide) convexe et fermée. Si $x \notin C$ on peut séparer strictement $\{x\}$ et C.

Démonstration :
Montrons qu'il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $y \in C$

$$f(x) < \alpha < f(y).$$

Considérons $a = p_C(x)$ la projection de x sur C, et posons

$$f := \langle a - x, \cdot \rangle.$$

Puisque $x \notin C$, on a $x \notin a$, ce qui implique que $f(a-x) = \|a-x\|^2 > 0$, et donc $f(a) > f(x)$.
Par ailleurs, la caractérisation angulaire nous dit exactement que pour tout $y \in C$

$$f(a) \leq f(x).$$

Il suffit alors de poser $\alpha = 1/2(f(x) + f(a))$, et on obtient pour tout $y \in C$

$$f(x) < \alpha < f(a) \leq f(y),$$

ce qui achève la démonstration. □

Références

• Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, *Exercices de mathématiques oraux X-ENS : Algèbre 1.*
• Vinent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, *Objectif Agrégation.*