7 Inégalité isopérimétrique

ref : ZQ

Théorème 7.1 *Soit* ⬩ *une courbe fermée simple de classe* C^1 *du plan euclidien* $\mathbb{R}^2$. *On pose* $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\int_{\tilde{A}} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x|$ *(qui correspond à l'aire enfermée par* ⬩ *(via Jordan + Green-Riemann)). Alors on a l'inégalité dite isopérimétrique :*

$$\mathcal{A} \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

avec égalité si et seulement si ⬩ *est un cercle.*

Preuve.

Quitte à effectuer une dilatation de l'espace $(x, y) \mapsto (\delta x, \delta y)$ qui transforme l en δl et $\mathcal{A}$ en $\delta^2\mathcal{A}$, on peut supposer $l = 2\pi$. On se ramène donc à montrer que $\mathcal{A} \leq \pi$.

On paramètre ⬩ par longueur d'arc : $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ est définie sur $[0, 2\pi]$, $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, de classe $\mathcal{C}^1$ et $\|\gamma'(s)\| = 1, \quad \forall s \in [0, 2\pi]$. On l'obtient à partir d'un paramétrage quelconque (une immersion) $f(t)$ en posant $s(t) = \int_0^t \|f'(u)\|\mathrm{d}u$. Alors s est $\mathcal{C}^1$, sa dérivée est strictement positive, c'est donc un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme sur son image et donc $s \mapsto f(t(s)))$ est un paramétrage par longueur d'arc. Quitte à parcourir ⬩ dans l'autre sens, on peut retirer les valeurs absolues dans la formule de l'aire.

On remarque, du fait que x et y sont périodiques que :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\mathrm{d}s = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\overline{\gamma(s)}\gamma'(s)\mathrm{d}s = -i\pi < \gamma, \gamma' >$$

où le produit scalaire est le produit L^2 : $\int \overline{f}g\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$.

On développe γ en série de Fourier avec $c_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi}f(s)e^{-ins}\mathrm{d}s$. Comme f est $\mathcal{C}^1$, on a $c_n(f') = inc_n(f)$ par intégration par parties. La formule de Parseval (γ et γ' sont L^2 car continues) donne alors :

$$\mathcal{A} = \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(\gamma)|^2 n$$

Mais on a aussi : $\int_0^{2\pi}|\gamma'(s)|^2\mathrm{d}s = 2\pi$, ce qui donne d'après Parseval :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(\gamma)|^2 = 1$$

L'inégalité $n \leq n^2$ donne alors $\mathcal{A} \leq \pi$.

Si on a égalité : $\mathcal{A} = \pi$, alors toutes les inégalités précédentes sont des égalités. En particulier, l'inégalité $n \leq n^2$ étant stricte pour $n \neq 0, 1$. Seuls c_0 et c_1 sont non nuls. Donc ⬩ est le cercle de centre c_0 et de rayon $|c_1| = 1$ car le paramétrage est à vitesse 1.

Réciproquement, pour un cercle on a bien l'égalité : $l^2 = (2\pi r)^2 = 4\pi\pi r^2 = 4\pi\mathcal{A}$. □

Leçons concernées : Séries de Fourier, étude métrique de courbes, méthode de calcul d'intégrales.