Lemme de Morse

Théorème (Lemme de Morse)
Soient un ouvert $\mathcal{U}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *contenant* 0 *et* $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathscr{C}^3$. *Si* $Df(0) = 0$ *et si* $D^2f(0)$ *est une forme quadratique non dégénérée de signature* $(p, n-p)$ *alors il existe un difféomorphisme* $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ *entre deux voisinages de* 0 *tel que* $\varphi(0) = 0$ *et*

$$f(x) - f(0) = \varphi_1^2(x) + \cdots + \varphi_p^2(x) - \varphi_{p+1}^2(x) - \cdots - \varphi_n^2(x)$$

Lemme (Réduction des formes quadratiques version différentiable)
Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$, *inversible, il existe un voisinage* V *de* A_0 *dans* $S_n(\mathbb{R})$ *et une application*

$$\begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & M \end{array}$$

de classe $\mathscr{C}^1$, *telle que pour tout* $A \in V$

$$A = {}^tMA_0M$$

Preuve :
Soit φ l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array}$$

elle est bien définie et polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $M_n(\mathbb{R})$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|.\|$ d'application linéaire. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \varphi(I + H) &= A_0 + {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H \\ &= \varphi(I) + {}^tHA_0 + A_0H + o(\|H\|). \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} D\varphi(I)H &= {}^tHA_0 + A_0H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(D\varphi(I)) = \{H \in M_n(\mathbb{R}), A_0H \in A_n(\mathbb{R})\}$$

De plus $D\varphi(I)$ est surjective, en effet pour $S \in S_n(\mathbb{R})$ on prend $H = \frac{1}{2}SA_0^{-1}$ et on obtient

$$D\varphi(I)H = S$$

- On considère maintenant l'ensemble F défini par

$$F = \{M \in M_n(\mathbb{R}), A_0M \in S_n(\mathbb{R})\}$$

puis on note ψ la restriction de φ à F. L'ensemble F est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} D\varphi(I)$ dans $M_n(\mathbb{R})$ (contenant I), par suite $D\psi(I)$ est bijective.
Ainsi d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert U de I dans F, tel que ψ soit un $\mathscr{C}^1$ - difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$. De plus quitte à prendre $U := U \cap GL_n(\mathbb{R})$ on peut supposer $U \subset GL_n(\mathbb{R})$, et V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I) = \varphi(I)$. C'est à dire que pour tout $A \in V$ il existe une unique matrice $M \in U$ telle que

$$A = {}^tMA_0M$$

et $M = \varphi^{-1}(A)$ où ψ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$. □

Démonstration :
La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 au voisinage de 0 s'écrit

$$f(x) = f(0) + {}^txQ(x)x$$

où $Q(x)$ est la matrice symétrique

$$Q(x) = \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)dt$$

fonction $\mathscr{C}^1$ de x (car f est).
D'après le lemme il existe une matrice inversible $M(x)$ fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de x au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$Q(x) = {}^tM(x)Q(0)M(x)$$

d'où

$$f(x) - f(0) = {}^tyQ(0)y$$

avec $y = M(x)x$. Or $Q(0) = \frac{1}{2}D^2f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, et il existe donc un changement de coordonnées linéaire $y = Au$ où A est une matrice inversible telle que

$$\begin{aligned} {}^tyQ(0)y &= {}^tu^tAQ(0)Au \\ &= u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - u_n^2 \end{aligned}$$

Enfin l'application $\varphi : x \mapsto u = AM(x)x$ a pour différentielle en 0 :

$$D\varphi(0) = AM(0) = A$$

qui est inversible. En appliquant à nouveau le théorème d'inversion locale on obtient que φ est un $\mathscr{C}^1$ - difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = \varphi_1^2(x) + \cdots + \varphi_p^2(x) - \varphi_{p+1}^2(x) - \cdots - \varphi_n^2(x)$$

□

Détails Supplémentaires

Le lemme de Morse dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est une application quadratique , à un difféomorphisme local près, dès que sa hessienne en a est non dégénérée.

Références

- François Rouvière, *Petit Guide de Calcul Différentiel*
- Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, *Objectif Agrégation*