Si $n\geq 5$, $\mathcal{A}_n$ est simple. (28)

Théorème : Si $n\geq 5$, $\mathcal{A}_n$ est simple.

Prérequis : S_n est engendré par les $\{(1,i)\}_{i=2}^{n}$ $(n\geq 3)$

▶ A_n est donc engendré par les $\left((1,i)(1,j)\right)_{i,j=2}^{n} = \left((1,j,i)\right)_{\substack{i,j=2\\ i\neq j}}^{n}$
et comme $(1,j,i) = (1,2,i)(1,2,j)^{-1}$, $\mathcal{A}_n$ est engendré par les $(1,2,i)_{i=3}^{n}$ donc par les $(j,k,p)_{\substack{p=1\\ p\neq j,k}}^{n}$ avec j,k qcq $\neq$.

▶ Soit H distingué dans $\mathcal{A}_n$. Si H contient un 3-cycle, alors $H=\mathcal{A}_n$. En effet si $(i,j,k)\in H$,
$\underbrace{(i,j,p)}_{\in\mathcal{A}_n}\underbrace{(i,j,k)}_{\in H}(i,j,p)^{-1} = (j,p,k)\in H$ et les $(j,k,p)_{\substack{p=1\\ p\neq k,j}}^{n}$ sont dans H donc $H=\mathcal{A}_n$

▶ Soit donc H distingué dans $\mathcal{A}_n$, avec $H\neq\{id\}$ et montrons que H contient un 3-cycle.
Soit $h\in H$, $h\neq id$. écrivons $h=abc\dots r$ la décomposition en cycle à supports disjoints de h.

▶ Si $a=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_p)$ avec $p\geq 4$.
si $x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathcal{A}_n$, $xax^{-1}=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1,\alpha_4,\dots,\alpha_p)$
et $xhx^{-1}h^{-1} = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4)\in H$ et $H=\mathcal{A}_n$.

▶ Supposons que a soit un 3-cycle. quitte à changer h en h^2 on peut supposer que $a, b, \dots, r$ sont tous des 3-cycles.
si $h=a$ c'est clair. sinon écrivons $a=(ijk)$ et $b=(pqr)$ et soit $x=(ijp)\in\mathcal{A}_n$. $xabx^{-1} = (j\,p\,k)(i\,q\,r)$
alors $xhx^{-1}h^{-1} = (i,j,q,k,p)$ et $H=\mathcal{A}_n$ via précédemment.

▶ si $h=\underbrace{(ij)}_{a}\underbrace{(pq)}_{b}$, soit $m\in[\![1,n]\!]$, $m\notin\{i,j,p,q\}$ $\quad n\geq 5$
et $x=(i\,p\,m)$, $xabx^{-1}=(pj)(m,q)$
et $xhx^{-1}h^{-1} = (i\,p\,m\,q\,j)$ et $H=\mathcal{A}_n$.

• maintenant si $h = ab \dots r$ où $a, b, \dots, r$ sont tous des transpositions à support disjointes, et si

$a = (i\,j)$, $b = (p, q)$, et $x = (i\,j\,p)$,

$$x\,a\,b\,x^{-1} = (j\,p)(i\,q)$$

et $x\,h\,x^{-1}h^{-1} = (i\,p)(q\,j)$ et $H = A_n$ via précédement.

<u>Bilan</u>: $H = A_n$ et A_n est simple