Leçon 181 : Convexité dans Rn. Applications en algèbre et en géométrie.

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine associé au $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I Barycentres

I.1 Notion de barycentre

[Gar18]

Notation 1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \tag{1}$$

d'inconnue $G \in E$.

Prop 2. (1) $\iff \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$, $\forall O \in \mathcal{E}$. On note O l'origine de $\mathcal{E}$.

Prop 3.
1. Si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$. Posons $\overrightarrow{v} := \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$. Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, tout point de $\mathcal{E}$ est solution de (1). Sinon aucun n'est point n'est solution de $\mathcal{E}$.
2. Si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$, alors il existe une unique solution vérifiant (1).

Déf 4. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ vérifiant $\overline{\alpha} \neq 0$. L'unique point G vérifiant $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ s'appelle le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_p, \alpha_p)$. On le note $G = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix}$.
Si $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p$, on dit que G est l'isobarycentre des points A_i.

Prop 5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix} = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ \lambda\alpha_1 & \cdots & \lambda\alpha_p \end{pmatrix}$. On peut alors supposer, sans perdre en généralités, que $\overline{\alpha} = 1$.

Prop 6. La droite D passant par deux points distincts $A, B \in \mathcal{E}$ est $D = \left\{ \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A & B \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Prop 7. Soient $1 \leq r < p$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i$, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i$, $\sum_{i=r+1}^{p} \alpha_i \neq 0$.
Alors :

$$\mathrm{bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix} = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_r \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} & \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A_{r+1} & \cdots & A_p \\ \alpha_{r+1} & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix} \\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i & \sum_{i=r+1}^{p} \alpha_i \end{pmatrix}$$

Ex 8.
1. Soient A, B, C trois points distincts d'un plan affine. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C. Alors les 3 médianes du triangle $\{A, B, C\}$ sont concourantes en G.
2. Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C, D. Alors les 4 médianes du tétraèdre $\{A, B, C, D\}$ sont concourantes en G.

I.2 Coordonnées barycentriques

[Gar18]

Déf 9. Soit $(A_0, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ tel que $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E. On dit que $(A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.

Prop 10. $M \in \mathcal{E} \iff \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $M = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Déf 11. Soit $M \in \mathcal{E}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $M = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Si $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, on appelle coordonnées barycentriques de M le $n+1$-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$.

Ex 12. Le centre de gravité, ou isobarycentre, d'un tétraèdre $\{A; B, C, D\}$ dans un espace affine de dimension 3 a pour coordonnées barycentriques $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

I.3 Stabilité des barycentres

[Com]

Prop 13. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines sur $\mathbb{R}$, soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$. f est une application affine, si et seulement si, pour toute famille pondérées $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{E}$, telle que $\overline{\alpha} = 1$, on ait $f(\mathrm{bar}(A_i, \alpha_i)_{i\in I}) = \mathrm{bar}((f(A_i), \alpha_i)_{i\in I})$.

Cor 14. L'application affine bijective $f \in GA(\mathcal{E})$ qui permute les points $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$, laisse fixe l'isobarycentre de ces points.

Prop 15. Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide $\mathcal{E}$. $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, si et seulement si, tout barycentre de points pondérés de $\mathcal{F}$ soit un élément de $\mathcal{F}$.

Cor 16. Soit $X \neq \varnothing$ une partie de $\mathcal{E}$. Le sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ engendré par X est l'ensemble des barycentres des familles finies de points pondérés de X.

Prop 17 (DEV 1)**.** Soit P un polygone du plan complexe, dont les sommets sont $\{z_1, \dots, z_n\}$. On définit alors par récurrence une suite de polygones $(P_k)_k$ avec $P_0 = P$, et les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arrêtes de P_k. La suite $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P.

II Convexité

[Com]

II.1 Notions de convexité

Lemme 18. Soit C une partie de $\mathcal{E}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Le barycentre G de toute famille finie $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_p, \alpha_p))$ de point pondérés de C, telle que $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i^p \alpha_i = 1$, appartient à C.
2. $\forall M, N \in C,\ [M, N] := \{(1-t)M + Nt : t \in [0,1]\} \subseteq C$.

Déf 19. Une partie C de $\mathcal{E}$ vérifiant les conditions équivalentes précédentes est dite convexe. On appellera dimension de C, notée $\dim C$, la dimension du sous-espace affine engendré par C.

Ex 20. Dessins pages 142 du Combes.

Prop 21. Pour toute famille $(C_i)_{i\in I}$ de parties convexes de $\mathcal{E}$, l'intersection $\bigcap_{i\in I} C_i$ est convexe.

Prop 22. Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est une application affine, l'image $f(C)$ de toute partie convexe C de $\mathcal{E}'$ est convexe, et l'image réciproque $f^{-1}(C')$ de toute partie convexe C' de $\mathcal{E}'$, est convexe.

Ex 23. La boule unité de E est convexe. Si $E = \mathbb{R}^3$, muni de la norme $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$, sa boule unité est un cube C dont les faces sont les plans affines d'équations $x_i = \pm 1$. Le dual de sa boule unité est un octaèdre dont les 8 faces sont des triangles équilatéraux.

Déf 24. On dit que K est un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ si K est un compact convexe d'intérieure non vide de $\mathbb{R}^n$.

Notation 25. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on lui associe la forme quadratique $q_S(x) = {}^t xSx$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, et $\mathcal{E}_S = \{x \in \mathbb{R}^n : q_S(x) \leq 1\}$ son ellipsoïde centrée en 0 associée.

Prop 26 (DEV 2)**.** Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on note $\mu(S) = \det(S)^{-\frac{1}{2}}$. Alors $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_S) = \mu(S)\,\mathrm{Vol}(B)$, où B désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne.

Prop 27 (DEV 2)**.**
1. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe
2. La fonction μ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Thm 28 (DEV 2)**.** Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Cor 29. Soit K corps convexe K, il existe une unique ellipsoïde de volume minimal contenant K, centré en $b \in \mathbb{R}^n$.

II.2 Enveloppe convexe

Déf 30. Soit $X \neq 0$ une partie de $\mathcal{E}$. On appelle enveloppe convexe de X, notée $Conv(X)$, le plus petit convexe de $\mathcal{E}$ contenant X

Prop 31. L'enveloppe convexe de X est l'intersection de toutes les convexes de $\mathcal{E}$ contenant X. Il s'agit aussi de l'ensemble des barycentres $G = \mathrm{bar}((A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq p})$ où $A_i \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ et $\sum \alpha_i = 1$.

Cor 32. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine, alors pour tout $X \neq \varnothing$ de $\mathcal{E}$, $f(Conv(X)) = Conv(f(X))$.

Ex 33. Si $X = \{A, B\}$, où $A \neq B$, alors $Conv(X) = [A, B]$.

Si $X = \{A, B, C\}$, où $A \neq B$ et $C \notin (AB)$, alors $Conv(X)$ est le triangle ABC, dans le plan affine engendré par A, B et C.

App 34 (Gauss-Lucas)**.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant. Les racines de P' sont situés dans l'enveloppe convexe des racines de P.

II.3 Points extrémaux

Lemme 35. Soit C une partie convexe de $\mathcal{E}$, et soit $P \in C$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M, N \in C,\ P = \text{bar}((M, \frac{1}{2}), (N, \frac{1}{2})) \Rightarrow M = P = N$.
2. $\forall M, N \in C,\ \forall t \in]0,1[,\ P = \text{bar}((M, 1-t), (N, t)) \Rightarrow P = M = N$.
3. $C \backslash \{P\}$ est convexe.

Déf 36. Un tel point P de la partie convexe C, qui ne peut être isobarycentre de deux points de C, est appelé point extrémal de C.

Prop 37. Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. Toute application affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $f(C) = C$ permute les pointes extrémaux de C.

Ex 38. L'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, est la sphère unité. De plus, $Conv(S(0,1)) = B(0,1)$.

Bibliographie

[Com] François Combes. *Algèbre et géométrie*. 2ème édition. Bréal.

[Gar18] Jean-Marc Garnier. *Groupes et géométrie pour l'agrégation*. ellipses, 2018.