Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
[Rom21] pour GL et SL.

I Généralités

I.1 Premières propriétés

Notation 1. On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

Thm 2. $(GL(E), \circ)$ et $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ sont des groupes. On les appelle tous les deux groupe linéaire.

Thm 3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'application $\mathscr{L}(E) \to M_n(\mathbb{K})$, $u \mapsto (u(e_i)_j)_{1 \le i,j \le n}$ est un isomorphisme d'algèbre. Il induit un isomorphisme de groupe de $GL(E)$ dans $GL_n(\mathbb{K})$.

Rq 4. Grâce à cet isomorphisme, étudier $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{K})$ devient équivalent.

Thm 5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, sont équivalents :

1. $u \in GL(E)$.
2. u transforme toute base de E en une base de E.
3. $\det u \neq 0$.
4. 0 n'est pas valeur propre de u.

Déf 6. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. On appelle matrice permutation associée à σ, notée P_σ, la matrice passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$.

Prop 7. L'application $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme injectif de groupes de $\mathfrak{S}_n$ vers $GL_n(\mathbb{K})$, et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$, la signature de σ.

I.2 Groupe spécial linéaire

Déf 8. On appelle groupe spécial linéaire l'ensemble $SL(E) := \{u \in \mathscr{L}(E) : \det u = 1\}$.

Prop 9. $SL(E)$ est un sous-groupe distingué de $GL(E)$, isomorphe à $SL_n(\mathbb{K})$. Et on a un isomorphisme de groupe $GL(E)/SL(E) \simeq \mathbb{K}^*$.

Prop 10. $Z(GL(E)) = \mathrm{Id}_E \mathbb{K}^*$, et $Z(SL(E)) = \mathbb{U}_n(\mathbb{K}) \mathrm{Id}_E$, où $\mathbb{U}_n(\mathbb{K}) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda^n = 1\}$.

Déf 11. On appelle groupe projectif linéaire le groupe $PGL(E) = GL(E)/\mathbb{K}^* \mathrm{Id}_E$, et groupe spécial linéaire le groupe $PGL(E) = SL(E)/\mathbb{U}_n(\mathbb{K}) \mathrm{Id}_E$.

Prop 12. $Z(PGL(E)) = Z(PSL(E)) = \{\overline{\mathrm{Id}_E}\}$.

I.3 Groupe orthogonal

Dans cette partie, E désigne un espace euclidien de dimension n, munit du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Soit $\| \cdot \|$ sa norme associée.

Déf 13. On appelle groupe orthogonal de E, noté $O(E)$, l'ensemble des isométries de E, où $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie, si et seulement si, pour tout $x, y \in E$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$.

Prop 14. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Sont équivalents :

1. $u \in O(E)$.
2. $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
3. u transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E.

Déf 15. On appelle groupe orthogonal de $M_n(\mathbb{R})$, noté $O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tMM = I_n\}$.

Prop 16. $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Thm 17. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. L'application $O(E) \to O_n(E)$, qui à u associe la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $(u(e_1), \dots, u(e_n))$, est un isomorphisme de groupe.

Cor 18. Pour tout $u \in O(E)$, $\det u = \pm 1$.

Déf 19. On appelle groupe spécial orthogonal, noté $SO(E)$, l'ensemble des isométries de déterminant égale à 1.

Prop 20. $SO(E)$ est un sous-groupe distingué de $O(E)$, d'indice 2.

II Etude des générateurs

II.1 Groupe linéaire

Déf 21. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. On appelle transvection d'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$ toute application linéaire définie par $u = \mathrm{Id}_E + a\varphi$, où $a \in \operatorname{Ker}\varphi$. On notera $\tau_{\varphi,a}$ une telle transvection.

Prop 22. Soient $\varphi \in E^*$ non nulle, et $a \in \operatorname{Ker}\varphi$:

1. $\tau_{\varphi,a}^2 = \tau_{\varphi,2a}$ est une transvection.
2. $\tau_{\varphi,a} \in GL(E)$, son inverse est la transvection $\tau_{\varphi,-a}$, 1 est son unique valeur propre, l'espace propre associé étant $\operatorname{Ker}\varphi$ si $a \neq 0$.

Prop 23. $u \neq \mathrm{Id}_E$ est une transvection, si et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice u est $T_{ij} = I_n + \lambda E_{ij}$, où $1 \leq i, j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Déf 24. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. On appelle dilatation d'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$ toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E)$ définie par $u = \mathrm{Id}_E + a\varphi$, où $a \in E \backslash \operatorname{Ker}\varphi$. On notera $\delta_{\varphi,a}$ une telle dilatation.

Prop 25. $\delta_{\varphi,a} \in GL(E)$, si et seulement si, $\lambda := 1 + \varphi(a) \neq 0$. Lorsque c'est le cas, on dit que $\delta_{\varphi,a}$ est une dilatation de rapport λ.

Prop 26. L'inverse d'une dilatation de rapport λ, est une dilatation de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

Prop 27. $u \in \mathscr{L}(E)$ est une dilatation de rapport $\lambda \in \mathbb{K}^*$, si et seulement si, il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base est $D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{nn}$.

Lemme 28. Soient H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E, et $a \in E \backslash (H_1 \cup H_2)$.

1. L'ensemble $H = (H_1 \cap H_2) \oplus \mathbb{K}a$ est un hyperplan de E. De plus, $E = H \oplus H_1 = H \oplus H_2$.
2. Il existe une transvection u telle que $u(a) = a$ et $u(H_1) = H_2$

Cor 29. Pour tout $x, y \in E \backslash \{0_E\}$, il existe $u \in SL(E)$ produit de une ou deux transvections tel que $y = u(x)$.

Thm 30. Le groupe $SL(E)$ est engendré par les transvections.

Thm 31. Le groupe $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations.

II.2 Groupe orthogonal

Dans cette partie, E désigne un espace euclidien de dimension n, munit du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Soit $\| \cdot \|$ sa norme associée.

Déf 32. Soit F un sous-espace vectoriel de E. La symétrie orthogonale par rapport à F est l'application définie sur E par : $\forall x \in E$, $s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$. Où p_F désigne le projeté orthogonal sur F.

Déf 33. On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. On appelle retournement une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n - 2$.

Prop 34. Soit F un sous-espace vectoriel de E. $s_F^2 = s_F$ et s_F est auto-adjoint. $s_F \in O(E)$. Enfin, si F est de dimension $1 \leq p \leq n - 1$, il existe une base dans laquelle la matrice de s_F est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$. D'où $\det s_F = (-1)^{n-p}$.

Thm 35. Si $\dim E \geq 2$, $O(E)$ est engendré par les réflexions. Précisément, toute isométrie de E peut s'écrire comme le produit d'au plus n réflexions.

Thm 36. $SO(E)$ est engendré par les retournements.

App 37. $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

III Etude des actions

III.1 Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$

Thm 38. $GL_n(\mathbb{K})$ définit une action sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$: $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\forall M \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $P \cdot M = PM$. On l'appelle action par translation (à gauche).

Thm 39. Deux matrices ont même orbite pour cette action, si et seulement si, elles ont même noyau.

Notation 40. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note L_i sa i-ème ligne, $d_i = \min\{j \in \{1, \ldots, m\} : a_{ij} \neq 0\}$.

Déf 41. On dit qu'une matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ est échelonnée en lignes si elle est nulle, ou si il existe $1 \leq r \leq n$ tel que :

— Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $L_i \neq 0$.

— Pour tout $i \geq r + 1$, $L_i = 0$.

— $1 \leq d_1 < \ldots < d_r \leq m$

Déf 42. On dit qu'un système linéaire $AX = b$, $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, est échelonné si la matrice A est échelonnée en lignes.

Thm 43 (Pivot de Gauss)**.** On considère les opérations élémentaires suivantes :

— La multiplication à droite par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de remplacer L_i par λL_i.

— La multiplication à droite par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer L_i par $L_i + \lambda L_j$

Thm 44. Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$, produit de matrice de permutations et de transvections, telle que la matrice PA soit échelonnée en ligne. Une telle matrice est la forme normale de l'orbite de A pour cette action.

Cor 45. Une opération élémentaire sur les lignes d'un système $Ax = b$ le transforme en un système équivalent.

III.2 Action par équivalence

[Rom21] Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$

Thm 46. $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ définit une action sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$: $\forall (P,Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$, $\forall M \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $(P,Q)\cdot M = PMQ^{-1}$. On l'appelle action par équivalence.

Déf 47. Deux matrices $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes si elles sont dans la même orbite pour cette action.

Thm 48 (Invariant total)**.** Deux matrices sont équivalentes, si et seulement si, elles ont même rang. Entre autre, toute matrice de rang r est équivalente à $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,m-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{pmatrix}$.

III.3 Actions matricielles sur les quaternions

[CG17]

Prop 49. $GL_n(\mathbb{K})$ agit par conjugaison sur $M_n(\mathbb{K})$: $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\forall M \in M_n(\mathbb{K})$, $P \cdot M = PMP^{-1}$.

Déf 50. On appelle corps des quaternions, et l'on note $\mathbb{H}$ l'algèbre de dimension 4 sur le corps des réels, ayant pour base $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, dans laquelle la multiplication est définie par :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \text{ et } \mathbf{ijk} = -1.$$

Notation 51. On note $SU_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$.

Prop 52. $SU_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$, homéomorphe avec $\mathbb{S}^3$.

Notation 53. On note $H^* \simeq \mathbb{R}_+^* I_2 \times SU_2(\mathbb{C}) \subseteq GL_2(\mathbb{C})$.

Thm 54. $\mathbb{H} \simeq H^* \cup \{0\}$. On notera alors $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

Notation 55.

1. Si $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, et si l'on note $a = x + iy$, $b = z + it$, un élément de $\mathbb{H}$ s'écrit $h = x\mathbf{1} + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + t\mathbf{k} = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$.
2. On note $\overline{h} = x\mathbf{1} - y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - t\mathbf{k}$ le conjugué de h.
3. On note $N(h) = \det h = |a|^2 + |b|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.
4. On note $\mathbb{I} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Prop 56. N définit une norme sur $\mathbb{H}$, et $N(hh') = N(h)N(h')$ pour tout $h, h' \in \mathbb{H}$.

Thm 57. $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$. De plus, c'est un corps non commutatif. Son centre est $\mathbb{R}$.

Prop 58. $SU_2(\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur $\mathbb{H}$. $SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})$ agit par équivalence sur $\mathbb{H}$.

Thm 59 (DEV 1)**.** Il existe deux isomorphismes de groupes :

1. $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.
2. $SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})/\{(I_2, I_2), (-I_2, -I_2)\} \simeq SO_4(\mathbb{R})$.

IV Etude pour des corps particuliers

IV.1 Topologie pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque.

Prop 60. $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$, l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Prop 61. L'application $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}_n[X]$, $A \mapsto \chi_A$ est continue.

Prop 62. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.

Prop 63. $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Prop 64. $SO_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs.

Prop 65. Les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$ sont $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R}) := \{M \in O_n(\mathbb{R}) : \det M = -1\}$.

IV.2 Dénombrement pour les corps finis

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini à $q = p^m$ éléments, p premier.

Prop 66. $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n}(q^i - 1)$.
$|SL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=2}^{n}(q^i - 1)$.

Prop 67. $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=2}^{n}(q^i - 1)$ et $|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)|/\operatorname{pgcd}(n, q-1)$.

Lemme 68 (Lemme de Fitting - DEV 2)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $E = \operatorname{Ker}(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)$

Prop 69 (DEV 2)**.** Soit $0 \le k \le n$, on définit $\mathcal{E}_k := \{(F, G) : \dim F = k,\ F \oplus G = E\}$. Alors $GL(E)$ agit transitivement sur $\mathcal{E}_k$ par : $\forall g, (F, G) \in GL(E) \times \mathcal{E}_k$, $g \cdot (F, G) = (g(F), g(G))$.

Cor 70 (Cardinal du cône nilpotent - DEV 2)**.** Soit $\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)$ l'enesmble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{F}_q)$. Alors $N_n := |\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)| = q^{n(n-1)}$.

Bibliographie

[CG17] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome second*. Calvage et Mounet, 2017.

[Rom21] Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. 2e éd. De Boeck Supérieur, 2021.