Leçon 106 : Groupe linéaire d'un ev de dim finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

I) Généralités sur le groupe linéaire

1) Définitions et caractérisations [ROMB]

- Caractérisations
- $GL(E) \simeq GL_n(\mathbb{K})$ via le choix d'une base
- Def de $SL(E)$ avec le det

2) Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$ [PERR]

- Dilatations et transvections
- $SL(E)$ est engendré par les transvections
- $GL(E)$ est engendré par les dilatations et les transvections
- Matrices de permutations et morphisme de groupes associé
- Théorème de Brauer [BECK]

3) Centre, cas des corps finis [CAL,PERR,ROMB]

- Caractérisation des homothéties
- $Z(SL(E))$ et $Z(GL(E))$
- Groupes projectifs linéaires
- Cardinaux
- Isomorphismes exceptionnels
- $G \hookrightarrow S_{|G|} \hookrightarrow GL_n(\mathbb{F}_\iota)$ et liens avec Sylow

II) Sous-groupes de $GL(E)$ [ROMB]

1) Groupe dérivé

- Définition groupe dérivé
- $D(GL(E))$ et $D(SL(E))$

2) Groupe orthogonal

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E euclidien

- $O(E)$ sg de $GL(E)$ et lien avec $O_n(\mathbb{R})$
- Définition $SO(E)$
- Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$

III) Actions de $GL_n(\mathbb{K})$ [ROMB]

1) Action par translation

- Translation à gauche : le noyau est un invariant total
- Translation à droite : l'image est un invariant total
- Définition matrice échelonnée
- Pivot de Gauss et lien avec le rang et l'orbite
- Tableau opérations élémentaires

2) Action par conjuguaison

- Etre dans la même orbite = être semblables
- Deux matrices sembables ont même rang, déterminant, trace et polynôme caractéristique

3) Action par équivalence

- Matrices J_r
- Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang

4) Sur les décompositions de E en somme directe

- Dénombrement des matrices dz

IV) Topologie

1) Propriétés générales [?]

- $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert, dense, cpa
- Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$
- $SL_n(\mathbb{K})$ est cpa et fermé
- $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts
- Composantes connexes de $SO_3(\mathbb{R})$
- $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

3) Exponentielle matricielle [BER]

- Définition
- $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéo
- De classe C^1 et différentielle en 0
- Surjectivité sur $GL_n(\mathbb{C})$ mais pas sur $GL_n(\mathbb{R})$
- App : toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ possède une racine p-ième

4) Décomposition polaire [CALI]

- App : Existence d'une unique racine carré dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$
- App : Maximalité du groupe orthogonal
- App : norme 2