Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

I) Groupes finis

1) Théorème de Lagrange, ordre d'un élément [BER]

- Ordre d'un groupe
- Théorème de Lagrange
- Ordre d'un élément
- Ordre d'un produit et de la puissance d'un élément

2) Actions de groupe [BER]

- Définition et exemples classiques
- Théorème de Cayley
- Définition orbites, stabilisateurs, fixateurs
- Equation aux classes
- Théorème de Cauchy
- Formule de Burnside et application : nombre de points fixes moyen d'une permutation
- Théorème de Dixon

3) p-groupes et théorie de Sylow [ROM,BER]

- Centre d'un p-groupe
- Classification des groupes d'ordre p^2
- Sous-groupe de Sylow
- Théorème de Sylow (Perrin) : Un groupe d'ordre 63 n'est pas simple

II) Groupes finis abéliens

1) Groupes cycliques [BER]

- Définition (groupe monogène et) cyclique
- Les groupes cycliques sont abéliens
- Si G cyclique d'ordre n, $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Tout groupe d'ordre p est cyclique
- Sous-groupe d'un groupe cyclique
- Nombre d'éléments d'ordre d dans un groupe cyclique
- Tout sous-groupe fini de $\mathbb{K}^\times$ est cyclique : application à $\mathbb{F}_q^\times$
- Théorème des restes chinois

2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [SZP]

- Générateurs
- $Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
- Cyclicité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

3) Classification des groupes abéliens finis [BER]

- Théorème de structure des groupes abéliens finis
- Groupes de petit ordre

III) Exemples de groupes finis

1) Groupe des permutations [SZP]

- Définition
- Toute permutation s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints
- Générateurs de $\mathcal{S}_n$
- Ordre d'une permutation
- Tous les cycles d'ordre k sont conjugués –> classes de conjuguaison
- Définition signature et application au déterminant
- Plongement de $\mathcal{S}_n$ dans $GL_n(A)$ pour A anneau commutatif
- $\mathcal{A}_\setminus$ simple pour $n \geq 5$

2) Groupe diédral [ULM]

- Définition
- Ordre du groupe diédral
- Générateurs du groupe diédral