Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Application.

I) Nombres complexes de module 1

1) Paramétrisations [ARFR]

- Définition de $\mathbb{U}$
- $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \simeq \mathbb{C}^*$
- *exp* est un mophisme de groupes
- Définition de π avec le morphisme surjectif
- $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$
- Définition de *cos* et *sin*

2) Trigonométrie [ARFR]

- Formules d'Euler
- Formules d'addition *cos* et *sin*
- Formules de Moivre
- Noyau de Dirichlet

II) Racines n-ièmes de l'unité [ARFR,ROM]

1) Définitions et propriétés

- Définition
- Cyclicité et générateurs
- $\mathbb{U}_n$ est le seul sg de $\mathbb{U}$ d'ordre n
- Racines primitives
- Tout groupe cyclique d'ordre n est iso à $\mathbb{U}_n$
- Sous-groupes de $\mathbb{U}_n$
- $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{U}_d^*$
- Théorème de Kronecker

2) Cyclotomie [PERR, BER]

- $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$
- Propriétés des polynômes cyclotomiques
- $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire, irred sur $\mathbb{Z}$
- Toute extension finie de $\mathbb{Q}$ possède un nombre fini de racines de l'unité

III) Apparitions en algèbre et en géométrie

1) Algèbre linéaire [GOU]

- Définition matrice unitaire
- Les matrices unitaires sont dz et de spectre inclus dans $\mathbb{U}$
- Décomposition polaire et analogie avec l'isomorphisme du début avec $\mathbb{C}^*$

2) Géométrie plane [ARFR]

- Définition argument
- $\mathbb{U} \simeq SO_2(\mathbb{R})$
- i correspond à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ par l'isomorphisme $\mathbb{U} \simeq SO(\mathbb{C})$

Annexe : Nombre de module 1 sur le cercle unité