LEMME DE MORSE

Leçons 157/170/206/214/215/218

Rouvière p209, 354

Lemme : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Il existe un voisinage V de $S_n(\mathbb{R})$ de A_0, $\Psi : V \to GL_n(\mathbb{R})$ C^1 telle que pour tout $A \in V$: $A = {}^t\Psi(A) A_0 \Psi(A)$

Th. Lemme de Morse. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^3 telle que $df(0) = 0$, $d^2f(0)$ non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$ un C^1 difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que : $\varphi(0) = 0$

$$\forall x \in V,\ f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i^2(x) - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i^2(x)$$

---

preuve du lemme Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$.

Soit $h : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto {}^tMA_0M \end{cases}$ de classe C^1 polynomiale

On calcule la diff de h en I_n, but : restreindre cette df(I_n) pour appliquer le TIL

Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$, $h(I_n + H) = h(I_n) + {}^tHA_0 + A_0H + o(\|H\|)$ (linéaire en H ; on prend n'importe quelle norme car en dimension finie)

Ainsi $dh(I_n) : H \mapsto {}^tHA_0 + A_0H$

De plus, $\ker(dh(I_n)) = \{H \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tHA_0 = -A_0H\}$

$= A_0^{-1} A_n(\mathbb{R}) = G$ (notation)

On pose $F = \{H \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tHA_0 = A_0H\} = A_0^{-1} S_n(\mathbb{R})$

Ainsi on a : $M_n(\mathbb{R}) = F \oplus G$ car $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ et $A_0 \in GL_n(\mathbb{R})$

Soit $\Psi : F \to S_n(\mathbb{R})$, $\Psi = h_{|F}$.

$d\Psi(I_n)$ est injective : $I_n \in F$, $\ker(d\Psi(I_n)) = F \cap \ker(dh(I_n)) = \{0\}$

$d\Psi(I_n)$ est surjective : par TH du rang, $\dim(\mathrm{Im}(d\Psi(I_n))) = \frac{n+n}{2} = \dim(S_n(\mathbb{R}))$

Donc $d\Psi(I_n)$ est bijective.

Ainsi par le théorème d'inversion locale, il existe Ω un voisinage de I_n dans F tel que Ψ est un C^1 difféomorphisme de Ω dans $\Psi(\Omega) = V$.

Or V est un voisinage de $\Psi(I_n) = A_0$ dans $S_n(\mathbb{R})$.

Ainsi pour tout $A \in V$, il existe une unique $M = \Psi^{-1}(A) \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = {}^t\Psi^{-1}(A) A_0 \Psi(A)$$ ∎

---

preuve du TH Ici on identifie $S_n(\mathbb{R})$ aux formes quadratiques et $M_n(\mathbb{R})$ aux applications linéaires.

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$, soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses du Th. Quitte à réduire Ω, on suppose $\Omega = B(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, Ω est convexe.

Comme $f \in C^1$, on applique la formule de Taylor reste intégral à f au voisinage de 0.

$$\forall x \in \Omega,\ f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t)\, d^2f(tx)(x,x)\, dt = {}^txQx$$

avec $Q(x) = \int_0^1 (1-t)\, d^2f(tx)\, dt$.

Par théorème de dérivation sous l'intégrale, Q est C^1.

De plus, $Q(0) = \frac{1}{2} d^2f(0)$ est inversible et symétrique.

Par le lemme précédent, il existe V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, $M : V \to GL_n(\mathbb{R})$ C^1 telle que :

$$\forall x \in V,\ Q(x) = {}^tM(x) Q(0) M(x)$$

Soit $x \in V$, on a $f(x) - f(0) = {}^tx\, {}^tM(x) Q(0) M(x) x$.

Or $Q(0)$ est de signature $(p, n-p)$ donc d'après la loi de Sylvester, il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$Q(0) = {}^tA \Delta_{p,n-p} A.$$

Ainsi, pour tout $x \in V$: $f(x) - f(0) = {}^t(AM(x)x) Q(0) (AM(x)x)$.

On note $\varphi : \begin{cases} V \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto AM(x)x \end{cases}$ C^1 polynomiale

Pour tout $h \in V$, $d\varphi(0)(h) = AM(0)h$

En effet, soit $h \in V$, $\varphi(h) = AM(h)h$

$$= A(M(0) + dM(0)(h) + o(\|h\|))h$$
$$= AM(0)h + o(\|h\|).$$

Ainsi $d\varphi(0)$ est inversible d'inverse $h \mapsto M(0)^{-1}A^{-1}h$

Par théorème d'inversion locale, il existe W un voisinage de 0 tel que $\varphi : W \to \varphi(W)$ est un C^1 difféomorphisme, $0 = \varphi(0) \in W$.

Ainsi :

$$\forall x \in W,\ f(x) - f(0) = {}^t\varphi(x) \Delta_{p,n-p} \varphi(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \varphi_i^2(x) - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i^2(x).$$ ∎