Théorème de Banach Alaoglu

Nico

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout espace vectoriel normé ou espace de Hilbert sera un $\mathbb{K}$-espace. On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F

Théorème de Banach-Alaoglu (Cas séparable) : Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé séparable, et $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, bornée pour la norme subordonnée $|| \cdot ||_{\mathcal{L}}$. Alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telles que

$$\forall x \in E,\ T_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(x)$$

Corollaire (Cas d'un Hilbert séparable) : Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace de Hilbert séparable, $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ bornée. Alors il exsite $x \in H$ telle que

$$\forall y \in H,\ < x_n, y > \xrightarrow[n\to+\infty]{} < x, y >$$

On dira que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x

Remarque : une fois que le mot convergence faible a été placé, c'est s'ouvrir à des questions dessus. Alors attention...

Afin de démontrer le théorème, on utilisera le procédé d'extraction diagonale que l'on saura démontrer.

Démonstration. Soit $(T_n)_n$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé

Etape 1 : Construction de la sous suite

D'une part, E étant sépérable, il existe une suite $(x_p)_p$ d'éléments de E telle que $X := \{x_p : p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E pour la norme $|| \cdot ||$. D'autre part, $(T_n)_n$ étant bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $||T_n||_{\mathcal{L}} \leq M$. Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $(T_n(x_p))_n$ est bornée dans $\mathbb{K}$. Par le théorème de Bolzano Weierstrass, il existe alors, $\psi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice telle que $(T_{\psi_0(n)}(x_0))_n$ converge dans $\mathbb{K}$.

On construit récursivement une suite d'extractrice $(\varphi_p)_p$:

1. On pose $\varphi_0 = \psi_0$, alors $(T_{\varphi_0(n)}(x_0))_n$ converge dans $\mathbb{K}$
2. $(T_{\varphi_0(n)}(x_1))_n$ est bornée dans $\mathbb{K}$, donc par Bolzano Weirstrass, il existe $\psi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice telle que $(T_{\varphi_0(\psi_1(n))}(x_1))_n$ converge dans $\mathbb{K}$. On pose $\varphi_1 = \varphi_0 \circ \psi_1$. Alors on a aussi que $(T_{\varphi_1(n)}(x_0))_n$ converge dans $\mathbb{K}$ comme sous suite de $(T_{\varphi_0(n)}(x_0))_n$. Et $(\varphi_1(n))_n$ est strictement croissante par construction.
3. Plus généralement, on suppose que pour $p \in \mathbb{N}$, on a construit φ_p telle que $\forall k \leq p$, $(T_{\varphi_p(n)}(x_k))$ converge dans $\mathbb{K}$. Alors on construit de la même manière φ_{p+1} telle que $\forall k \leq p+1$, $(T_{\varphi_{p+1}(n)}(x_k))$ converge dans $\mathbb{K}$.

Alors par un procédé d'extraction diagonale, l'application

$$\varphi : n \to \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$$

est une extractrice telle que $(T_{\varphi(n)}(x_p))_n$ converge dans $\mathbb{K}$ $\forall p \in \mathbb{N}$

Etape 2 : Convergence dans tout E

Soient $x \in E, \varepsilon > 0$. Alors par densité de X, il existe $p \in \mathbb{N}$ telle que $||x - x_p|| \leq \varepsilon$. Or $(T_{\varphi(n)}(x_p))_n$ converge dans $\mathbb{K}$, la suite est donc de Cauchy dans $\mathbb{K}$, d'où on peut poser $N \in \mathbb{N}$ telle que $\forall n, m \geq N$,

$$|T_{\varphi(n)}(x_p) - T_{\varphi(m)}(x_p)| \leq \varepsilon$$

D'où $\forall n, m \geq N$:

$$\begin{aligned} |T_{\varphi(n)}(x) - T_{\varphi(m)}(x)| &= |T_{\varphi(n)}(x) - T_{\varphi(n)}(x_p) + T_{\varphi(n)}(x_p) - T_{\varphi(m)}(x_p) + T_{\varphi(m)}(x_p) - T_{\varphi(m)}(x)| \\ &\leq |T_{\varphi(n)}(x) - T_{\varphi(n)}(x_p)| + |T_{\varphi(n)}(x_p) - T_{\varphi(m)}(x_p)| + |T_{\varphi(m)}(x_p) - T_{\varphi(m)}(x)| \\ &\leq M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon \\ &= \varepsilon(2M+1) \end{aligned}$$

D'où $(T_{\varphi(n)}(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$, et donc par complétude de $\mathbb{K}$, converge dans $\mathbb{K}$. Notons $T(x)$ sa limite.

Etape 3 : Montrons que T est une forme linéaire continue de E.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$T_{\varphi(n)}(x + \lambda y) = T_{\varphi(n)}(x) + \lambda T_{\varphi(n)}(y) \text{ et } |T_{\varphi(n)}(x)| \leq M||x||$$

D'où par passage à la limite :

$$T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y) \text{ et } |T(x)| \leq M||x||$$

D'où $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

□

Montrons maintenant le corollaire :

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

On définit une sous suite de formes linéaires continues $(T_{x_n})_n$ telle que :

$$T_{x_n} : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & < x_n, y > \end{array} \right. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or H est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel séparable, que l'on peut munir de la norme $|| \cdot || = \sqrt{| < \cdot, \cdot > |}$. Soit $n \in \mathbb{N}$

Si $x_n = 0$, alors $T_{x_n} = 0$ et donc $||T_{x_n}||_{\mathcal{L}} = 0$. Sinon si $x_n \neq 0$, on a que $\forall y \in H$, $|T_{x_n}(y)| \leq ||x_n||\ ||y||$ par inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $||T_{x_n}||_{\mathcal{L}} \leq ||x_n||$. Pour

$$y_n = \frac{x_n}{||x_n||}$$

On a que $||y_n|| = 1$ et $|T_{x_n}(y_n)| = ||x_n||$. D'où $||T_{x_n}||_{\mathcal{L}} \geq ||x_n||$ et donc $||T_{x_n}||_{\mathcal{L}} = ||x_n||$.

Ainsi, par hypothèse sur $(x_n)_n$, $(T_{x_n})_n$ est bornée dans H pour la norme subordonnée. D'où par le théorème de Banach Alaoglu, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall y \in H, (< x_{\varphi(n)}, y >)_n \text{ converge}$$

On note $T(y)$ sa limite ponctuelle, où $T \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément $x \in H$ telle que $T : y \mapsto < x, y >$. D'où $(x_{\varphi}(n))_n$ converge faiblement vers x

□

Questions de jury ?

Question 1. *Montrer que φ est bien une extractrice telle que $(T_{\varphi(n)}(x_p))$ converge dans $\mathbb{K}$ pour tout p*

Question 2. *Montrer que $\mathbb{K}$ est complet*

Question 3. *Enoncer et démontrer le théorème de Bolzano Weierstrass*

Question 4. *Enoncer et démontrer le théorème de représentation de Riesz*

Question 5. *Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

Question 6. *Le corollaire est-il toujours vrai si H n'est pas séparable ?*

Question 7. *Montrer que la convergence forte implique la convergence faible*

Question 8. *Montrer que si E est de dimension finie, alors le théorème de Banach Alaoglu implique que $T_n \to T$ (fortement !)*

Question 9. *Montrer que si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, et que de plus $||x_n|| \to ||x||$, alors $x_n \to x$ pour $||\cdot||$*

Question 10. *Montrer que la boule unité d'un Hilbert est "faiblement compact".*

Question 11. *Soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H. Montrer qu'elle converge faiblement vers* 0

Question 12. *Interpréter le corollaire comme un résultat sur le dual de H*

Référence

Julien Bernis, Laurent Bernis (2018). *Analyse pour l'agrégation de mathématiques - 40 développements.* Ellipses, p. 27.

J'ai choisi de + détailler l'extraction diagonale que dans le livre. Ainsi que de justifier la valeur de la norme subordonnée de $< x_n, \cdot >$. J'ai préféré ne pas parler du cas où H n'est pas séparable car je ne suis pas à l'aise avec les espaces de Hilbert non séparable.

Recasages

- Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité. (bof... c'est la compacité de l'adhérence d'une suite de R quoi, c'est pas fou. A la limite, si on parle d'extraction diagonale dans le plan)
- Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
- Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.