Théorème de Stone-Weierstrass

Nico

Prérequis : Borel-Lebesgue
Notations :

1. K un espace métrique compacte.
2. $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs réelles, qu'on notera par la suite tout simplement $\mathcal{C}(K)$

Théorème de Stone-Weierstrass : Soit K un espace métrique compacte et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre [a] de $\mathcal{C}(K)$. On suppose de plus que :

1. $\mathcal{A}$ sépare les points, c'est à dire que si $x, y \in K$ sont distincts, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$
2. $\mathcal{A}$ contient les fonctions constantes.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$ pour la norme $||\cdot||_\infty$.

a. sev stable par la multiplication

Voici une preuve de ce théorème, sans utiliser Bernstein ni Dini :
On aura besoin de 6 étapes :

1. Montrons qu'il existe une suite de polynômes réels $(r_n)_n$ qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction racine carrée $t \mapsto \sqrt{t}$

   Démonstration. On définit par récurrence la suite de fonctions $(r_n)_n$ par $r_0 = 0$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, 1],\ r_{n+1}(t) = r_n(t) + \frac{1}{2}(t - r_n(t)^2)$$
   Une récurrence permet de montrer que :
   (a) $(r_n)_n$ est polynomiale
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq r_n(t) \leq \sqrt{t}$. (On montre que d'une part, $t - r_n(t)^2 \geq 0$, ce qui donne que $(r_n)_n$ est croissante positive. Et d'autre part que $\sqrt{t} - r_{n+1}(t) \geq 0$)

(c) Pour tout $t \in [0,1]$, $r_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{t}$

Il ne reste plus qu'à montrer qu'une telle convergence est uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $\varepsilon_n(t) = \sqrt{t} - r_n(t)$, pour tout $t \in [0,1]$:

$$|\varepsilon_{n+1}(t)| = |\sqrt{t} - r_n(t) - \frac{1}{2}(t - r_n(t)^2)| = \varepsilon_n(t) \left|1 - \frac{\sqrt{t} + r_n(t)}{2}\right| \leq \varepsilon_n(t) \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)$$

D'où par itération :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \varepsilon_n(t) \leq \varepsilon_0(t) \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)^n = \sqrt{t} \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)^n$$

En posant $x = 1 - \dfrac{\sqrt{t}}{2} \in [0, \dfrac{1}{2}]$:

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \varepsilon_n(t) \leq 2(1-x)x^n$$

L'étude de la fonction $x \mapsto 2(1-x)x^n$ (1) nous donne que son sup sur $[0, \dfrac{1}{2}]$ est atteint en $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. D'où :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \varepsilon_n(t) \leq 2(1-x_n)x_n^n = \frac{2}{n+1} x_n^n \leq \frac{2}{n+1}$$

D'où par passage au sup et par encadrement, $\sup\limits_{t\in[0,1]} |\varepsilon_n(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ □

On aurait pu montrer la convergence uniforme en invoquant le théorème de Dini, voire admettre l'existence d'une telle suite par les polynômes Bernstein.

2. Montrons maintenant que si $f \in \mathcal{A}$, alors $|f| \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$.

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{A}$ et $x \in K$. On pose $a = ||f||_\infty$, qui est fini par compacité de K. Alors $\mathcal{A}$ étant une algèbre, $\dfrac{f^2}{a^2} \in \mathcal{A}$. Pour tout $x \in K$, $\dfrac{f(x)^2}{a^2} \in [0,1]$. Toujours par propriété d'algèbre, $r_n\left(\dfrac{f^2}{a^2}\right) \in \mathcal{A}$. D'où par passage à la limite

$$|f| = a \lim_{n\to+\infty} r_n\left(\frac{f^2}{a^2}\right) \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$$

□

3. Montrons un résultat similaire pour le max et le min.

(1). Soit f_n la fonction. $f_n'(x) = 2x^{n-1}(n(1-x) - x)$. Ca vaut 0 pour $x = 0$ et x

Démonstration. Soient $f, g \in \mathcal{A}$. Montrons que $\max(f,g), \min(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$.
On utilise le fait que :

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \text{ et } \min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

L'adhérence d'un sev étant un sev, on a bien que $\max(f,g), \min(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$ par l'étape 2. □

Plus généralement, si $f, g \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$, alors $\max(f,g), \min(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$. Et par récurrence immédiate, si $f_1, \ldots, f_n \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$, alors $\max(f_1, \ldots, f_n) \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$ et $\min(f_1, \ldots, f_n) \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$.

4. Montrons que pour $x, y \in K$ distincts, on a que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \exists h \in \mathcal{A}, h(x) = \alpha \text{ et } h(y) = \beta$$

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Puisque $\mathcal{A}$ sépare les points, il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $g(x) \neq g(y)$. Posons alors la fonction h définie par :

$$\forall t \in K,\ h(t) = \alpha + \frac{g(t)-g(x)}{g(y)-g(x)}(\beta - \alpha)$$

Par construction, $h(x) = \alpha$ et $h(y) = \beta$. Puisque $\mathcal{A}$ contient les constantes, et que $g \in \mathcal{A}$, alors $h \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est un sev. □

5. Montrons que pour tout $f \in \mathcal{C}(K)$, pour tout $x \in K$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$ tel que :

$$g(x) = f(x) \text{ et } g(y) \leq f(y) + \varepsilon,\ \forall y \in K$$

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{C}(K)$, $x \in K$.
Par l'étape 4, pour tout $z \neq x \in K$, il existe $h_z \in \mathcal{A}$ tel que $h_z(x) = f(x)$ et $h_z(z) = f(z)$.
On considère h_x la fonction constante égale à $f(x)$. Elle est élément de $\mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ contient les constantes. D'où [(2)] :

$$\forall z \in K,\ h_z(x) = f(x) \text{ et } h_z(z) = f(z)$$

Soit $z \in K$. Par continuité de f et h_z en z, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un

(2). on inclut le cas $z = x$

voisinage ouvert de z, noté V_z, tel que pour tout $y \in V_z$, $h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$ [3].
Par compacité de K, par propriété de Borel-Lebesgue, il existe $m \geq 1$, $z_1, \ldots, z_m \in K$, tels que $h_{z_1}(y) \leq f(y) + \varepsilon$ pour tout $y \in V_{z_i}$, et :

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{z_i}$$

Pour tout i, $h_{z_i} \in \mathcal{A}$, d'où par l'étape 3, $g := \min(h_{z_1}, \ldots, h_{z_m}) \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$, et il vient que pour tout $y \in K$, $g(x) = f(x)$ et $g(y) \leq f(y) + \varepsilon$. □

6. Montrons finalement que $\overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty} = \mathcal{C}(K)$.

Démonstration. L'inclusion $\overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty} \subseteq \mathcal{C}(K)$ est claire.
Soient $f \in \mathcal{C}(K)$, $x \in K$ et $\varepsilon > 0$.
Par l'étape 5, il existe $g_x \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$ tel que pour tout $y \in K$, $g_x(x) = f(x)$ et $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$.
Par continuité de f et g_x en x, il existe un voisinage ouvert de x, noté U_x, tel que pour tout $y \in U_x$:

$$g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$$

Par compacité de K, on peut considérer $n \geq 1$, $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que :

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

Posons $g = \max(g_{x_1}, \ldots, g_{x_n})$, par l'étape 3, $g \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$, et par construction et l'inclusion, pour tout $y \in K$:

$$f(y) - \varepsilon \leq g(y) \leq f(y) + \varepsilon$$

D'où par passage au sup,

$$||f - g||_\infty \leq \varepsilon$$

D'où $f \in \overline{\overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}} = \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||_\infty}$ □

Petit bonus : je montre briévement le cas complexe, et je montre que les polynomes trigonométriques sont denses dans l'ensemble des fonctions continues de période 2π à valeurs complexes.

(3). On considère un voisinage V_z tel que pour tout $y \in V_z$, $|h_z(y) - h(y)| \leq \varepsilon$ et $|f(z) - f(y)| \leq 2\varepsilon$. Donc puisque $f(z) = h_z(z)$, $h_z(y) \leq \varepsilon + f(z)$ et $f(y) \leq 2\varepsilon + f(z)$. D'où $h_z(y) - f(y) \leq \varepsilon$ et donc $h_z(y) \leq \varepsilon + f(y)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre complexe de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. En plus de séparer les points et contenir les constantes, on doit ajouter une hypothèse sur $\mathcal{A}$ pour obtenir le théorème de Stone-Weierstrass, cas complexe : $\mathcal{A}$ doit être **stable par conjugaison** : $f \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$. Montrons qu'avec cette hypothèse supplémentaire, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ pour la norme uniforme.

Soit $f \in \mathcal{A}$, puisque $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison et est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel :

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{f + \overline{f}}{2} \in \mathcal{A} \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \frac{f - \overline{f}}{2i} \in \mathcal{A}$$

Soit $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{A} : f(t) \in \mathbb{R},\ \forall t \in K\}$. Par la remarque ci-dessus,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{R}} + i\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$$

De plus, on peut montrer que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ qui contient les constantes réelles, et sépare les points. D'où par Stone Weirstrass réel, $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ et donc $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}) + i\mathcal{C}(K, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. □

Notons $P_{\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x \mapsto e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$. Montrons que $P_{\mathbb{C}}$ est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.

1. Préambule : actuellement, on n'a pas d'espace de la forme $\mathcal{C}(K)$. On identifie alors $\mathcal{C}_{2\pi}$ à $\mathcal{C}(T)$, où $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\pi\}$. Par le fait que $[0, 2\pi[\to M,\ x \mapsto 2\pi e^{ix}$, soit un homéomorphisme. L'identification est valable via l'application $\Phi : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathcal{C}(T)$, telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\Phi(f)(2\pi e^{ix}) = f(x)$. L'application est clairement linéaire, bijective et même isométrique, donc continue. Puisque T est un compacte, on pourra appliquer le théorème de SW. Puisque l'application est un homéomorphisme, tout résultat sur $C(T)$ sera valable sur $\mathcal{C}_{2\pi}$. On identifie $P_{\mathbb{C}}$ à $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(z \mapsto (\frac{z}{2\pi})^n : z \in T, n \in \mathbb{Z}\}$
2. $\mathbb{C}$-espace vectoriel : clair.
3. Stable par $\cdot$: Soient $n, m \in \mathbb{Z}$, $e^{inx}e^{imx} = e^{i(n+m)x} \in P_{\mathbb{C}}$.
4. Contient les constantes : $e^{i0x} = 1$ pour tout x.
5. Stable par conjugaison : $\overline{e^{inx}} = e^{-inx} \in P_{\mathbb{C}}$
6. Séparation : l'application identité $z \mapsto z$ sur T appartient à $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(z \mapsto (\frac{z}{2\pi})^n : z \in T, n \in \mathbb{Z}\}$, qui sépare clairement tous les points de T. Donc ok.

Par Stone Weierstrass, et que l'image d'une partie dense, par un homéo, est dense. Alors $P_{\mathbb{C}}$ est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ □

Question 1. *Justifier que l'hypothèse "contient les constantes" est nécessaire.*

Question 2. *Enoncer des théorèmes qui permettent de conclure directement l'étape 1*

Question 3. *Donner la définition de sous-algèbre.*

Question 4. *Que se passe-t-il pour une autre norme ?*

Question 5. *Montrer que l'adhérence d'un sev, est un sev*

Question 6. *Enoncer et montrer le théorème de Stone-Weierstrass pour le cas complexe.*

Question 7. *En déduire que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues de période* 1*, sur* $\mathbb{R}$*, à valeurs complexes.*

Référence

Li, Daniel (2024). *Cours d'analyse fonctionnelle*. ellipses, p. 46.

Recasages

Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.