Corentin Bergeron ENS Rennes

Interprétation géométrique du déterminant

C'est un développement très original (merci Masseix pour la découverte), mêlant algèbre et théorie de la mesure. On utilise les propriéts de la mesure de Lebesgue afin de caractériser une certaine mesure image, puis on utilise divers théorèmes de réductions (théorème spectral, décomposition polaire) afin de conclure. EN bonus, une petite application sur le volume d'un parallélogramme.

Ce développement se recase parfaitement dans les leçons 149 et 191. Un recasage dans les leçons 157 et 158 me parait tout à fait justifié, puisque c'est une application de théorèmes liés aux autoadjoints/matrices symétriques (si cela vous semble un peu abusif, vous pouvez toujours abréger l'étape 1 et démontrer rapidement la décomposition polaire).

I - Le développement

Preuve :

Soit λ_d la mesure de Lebesgue, $A \in GL(\mathbb{R}^d)$. On pose $\nu = A(\lambda_d)$ la mesure image de λ_d par A.

Étape 1 : Relations entre les deux mesures

$\star$ ν est invariante par translation : $\forall a \in \mathbb{R}^d, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\nu(a+B) = \lambda_d\big(A^{-1}(a+B)\big) = \lambda_d\big(A^{-1}(a) + A^{-1}(B)\big) = \lambda_d\big(A^{-1}(B)\big) = \nu(B).$$

$\star$ $\nu([0,1]^d) \neq 0$:

$$\nu(\mathbb{R}^d) = \lambda_d(\mathbb{R}^d) = +\infty \quad \text{et} \quad \nu(\mathbb{R}^d) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \nu\big(n+[0,1]^d\big) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \nu\big([0,1]^d\big).$$

$\star$ $\nu([0,1]^d) < +\infty$:

$$\nu([0,1]^d) = \lambda_d\big(\underbrace{A^{-1}([0,1]^d)}_{\text{compact}}\big) < +\infty.$$

On pose $\nu' = \dfrac{\nu}{\nu([0,1]^d)}$, ν' est une mesure invariante par translation vérifiant $\nu'([0,1]^d) = 1$. Par caractérisation de la mesure de Lebesgue, $\nu' = \lambda_d$ ie $\nu = \nu([0,1]^d) \cdot \lambda_d$.

Étape 2 : Calcul de $\nu([0,1]^d) = c$.

$\star$ **Cas A orthogonal :** Si $A \in O(\mathbb{R}^d)$,

$$A^{-1}\big(\{x : \|x\|_2 \leq 1\}\big) = \{x : \|x\|_2 \leq 1\}$$

d'où $\nu\big(\{x : \|x\|_2 \leq 1\}\big) = \lambda_d\big(\{x : \|x\|_2 \leq 1\}\big)$. Ainsi $c = 1 = |\det(A)|^{-1}$.

$\star$ **Cas symétrique positive :** Si $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$, par le théorème spectral, $\exists P \in O_d(\mathbb{R})$, $d_1, \dots, d_d \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $A = PDP^{-1}$. Posons le borélien $B = PD([0,1]^d)$. Par le cas précédent :

$$\nu(B) = \lambda_d\big(A^{-1}(B)\big) = \lambda_d\big(P([0,1]^d)\big) = 1.$$

De plus, $D([0,1]^d) = \prod_{i=1}^d [0, d_i]$, d'où

$$\lambda_d(B) = \lambda_d\left(\left(\prod_{i=1}^d [0,d_i]\right)\right) = \lambda_d\left(P\left(\prod_{i=1}^d [0,d_i]\right)\right) = \prod_{i=1}^d d_i = \det(A).$$

On a donc $c = (\det(A))^{-1} = |\det(A)|^{-1}$.

• **Cas général :** On effectue une décomposition polaire de A ;$A = OS$, $O \in O_d(\mathbb{R})$, $S \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. Pour un borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\nu(B) = \lambda_d\big(A^{-1}(B)\big) = \lambda_d\big(S^{-1}(O^{-1}(B))\big) = |\det(S)|^{-1}\lambda_d\big(O^{-1}(B)\big) = |\det(S)|^{-1}\lambda_d(B).$$

d'où

$$\nu(B) = |\det(A)|^{-1}\lambda_d(B)$$

car $\det(O) = \pm 1$.

Étape 3 : Si A n'est pas inversible.

Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $A(B) \subset A(\mathbb{R}^d)$ d'où $\lambda_d(A(B)) \leq \lambda_d(A(\mathbb{R}^d))$. Il suffit maintenant de remarquer que $A(\mathbb{R}^d)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^d$ de dimension $< d$, et donc possède une mesure nulle.

En effet si $b_1, \ldots, b_p$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$, que l'on complète, en posant $V : e_i \mapsto b_i$ (V inversible) et $G = \mathrm{Vect}[e_1, \ldots, e_p]$n on a :

$$V(G) = \mathrm{Im}(A),$$

et

$$\lambda_d(V(G)) = |\det(V)|\lambda(G) = k \to +\infty$$

$\lambda_d\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}[-k,k]^p \times \{0\}^{d-p}\right) = 0 parcontinuitécroissantedelamesure.$

On a bien $\lambda(A(B)) = 0 = |\det(A)| \cdot \lambda(B)$.

Application 1

Soit P un parallélépipède engendré par des vecteurs $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^d$. Alors $\lambda_d(P) = |\det(v_1, \ldots, v_d)$.

Preuve :

Soit $A : e_i \mapsto v_i$. On a

$$\lambda_d(P) = \lambda_d\big(A([0,1]^d)\big) = |\det(A)| \times \lambda_d([0,1]^d) = |\det(A)| = |\det(v_1, \ldots, v_d)|.$$

II - Remarques

1 - La démonstration de la mesure d'un s.e.v. de dim $< d$ est pour moi optionnelle, cependant, cela peut alors faire un peu cours pour centains.

2 - Il faut être un minimum à l'aise avec la théorie de la mesure, et connaître les principaux théorèmes (lemme des classes monotones, croissance des mesures, ...) Un excellent document de Masseix(AgregMath) sur ce développement regroupe des questions typiques qui pourraient être posés par un jury.

3 - Vous pouvez toujours remplacer le calcul du volume d'un parallélogramme par celui d'un ellipsoïde (entre autre). En effet, la classification affine des quadriques (ou celle des coniques si vous restez dans le programme) permet de transformer (par une application affine) la boule unité en n'importe quel ellipsoïde (ou ellipse). Le théorème permet alors de trouver la formule de l'ellipsoïde en fonctiondes grands axes.

III - Références

[Bri-Pag] : *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès