Corentin Bergeron ENS Rennes

Indécomposabilité de la loi de Poisson

Un développement typique de l'agrégation, mais en soi très sympa à faire. On y montre l'indécomposabilité de la loi de Poisson en utilisant un lemme sur les fonctions entières de type exponentiel qui ne s'annulent pas.

L'avantage de ce développement est qu'il se recase dans des leçons très diverses. Du côté probabilité, on êut le mettre dans les leçons 261, 264 et 266. Pour le côté hlomorphe et séries génératrices, on peut aussi le recaser dans les leçons 241, 243 et 245.

I - Le développement

Étape 1 : Un lemme sur des fonctions de type exponentiel

Lemme 1

Si f est une fonction entière, sans zéro, telle que $f(1) = 1$ et vérifiant pour un certain $C > 0$ et $A \in \mathbb{C}$:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq Ce^{A|z|}$$

, alors il existe$a \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(z) = e^{a(z-1)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Preuve :

Comme f ne s'annule pas, on peut écrire $f = e^g$ avec g entière ($g' = f'/f$). On a alors, puisqu'il existe $C > 0, A > 0$ tel que $|f(z)| \leq Ce^{A|z|}$:

$$\mathrm{Re}(g(z)) \leq A|z| + \log(C).$$

On écrit g sous forme de série entière : $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

On a :

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{it})e^{-int}\,dt, \quad \forall r > 0 \quad \text{(formule de la moyenne)}.$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{it})e^{int}\,dt \qquad (\text{car } z \mapsto g(z)z^n \text{ holomorphe}).$$

En conjuguant, puis sommant :

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\big(g(re^{it})\big)e^{-int}\,dt$$

d'où

$$|a_n| \cdot r^n \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \big(Ar + \log(C)\big)\,dt = 2Ar + 2\log(C).$$

Ainsi, $\forall n \geq 2$, $a_n = 0$ et $g(z) = a_0 + a_1 z$ i.e. $f(z) = e^{a_0} e^{a_1 z}$. La condition $f(1) = 1$ entraîne $a_0 = -a_1$.

Étape 2 : Indécomposabilité de la loi de Poisson

Théorème 2

Soit $\lambda > 0$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$ tels que q $T := X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors X et Y suivent des lois de Poisson.

Preuve :

Posons $f(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum p_n z^n$ avec $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ et $g(z) = \sum q_n z^n$ avec $q_n = \mathbb{P}(Y = n)$ (ce sont leurs séries génératrices).

Par hypothèse, et par indépendance :

$$\mathbb{E}[z^T] = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{z^m \lambda^m}{m!} = e^{\lambda(z-1)}$$

i.e.

$$f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

d'où

$$\left(\sum p_m z^m\right)\left(\sum q_m z^m\right) = \sum e^{-\lambda} \frac{z^m}{m!} \lambda^m.$$

En développant le produit (formules de Cauchy), on a $p_0 q_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = p_n q_0 + p_{n-1} q_1 + \cdots + p_0 q_n \geq p_n q_0 + p_0 q_n.$$

Ainsi

$$p_n \leq \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{q_0\, n!},$$

et f possède un rayon de convergence infini. Il en va de même pour g. Par prolongement analytique, on peut étendre le produit fg à tout $\mathbb{C}$: :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}.$$

Si $|z| = r \geq 1$:

$$|f(z)| \leq f(r)$$

et

$$q_0 f(r) \leq g(r) f(r) = e^{\lambda(r-1)}$$

d'où

$$|f(z)|, |g(z)| \leq C e^{\lambda(|z|-1)}.$$

Comme $f(1) = g(1) = 1$, par le lemme :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad f(z) = e^{\alpha(z-1)}, \ g(z) = e^{\beta(z-1)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Pour conclure, $f'(1) = \alpha = \sum_{n \geq 0} n p_n = \mathbb{E}[X] \geq 0$ (la série est de rayon de convergence $+\infty$) :

$$X \sim \mathcal{P}(\alpha).$$

II - Remarques

1 - Pas de difficultés particulières (à part bien retenir les arguments) et c'est impeccable niveau temps, ni trop court pour les plus rapides, ni trop long pour les plus lents.

2 - Attention à ne pas oublier de montrer que α et β sont des réels positifs, pour avoir bien des lois de Poisson.

III - Références

[Que-Zui] : *Analyse pour l'agrégation*, Hervé Queffélec, Claude Zuily