Corentin Bergeron ENS Rennes

Action sur le demi-plan de Poincaré

Développement très sympa et original portant sur des questions de géométrie, ce qui ravira à coup sûr le jury ! On y étudie l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *sur un domaine foncdamental, ce qui nous permettra de trouver un système de générateurs de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Pour le recasage, les leçons 108 et 191 sont vraiement adaptées. Si on insite un peu sur le côté action, la leçon 101 reste aussi un très bon candidat de recasage.

I - Prémices

Définition 1 *Domaine fondamental*

Le domaine fondamental D est l'ensemble :

$$D = \{z \in \Pi : \ -\frac{1}{2} \leq \Re(z) < \frac{1}{2} \ \text{ et } \ |z| \geq 1\}.$$

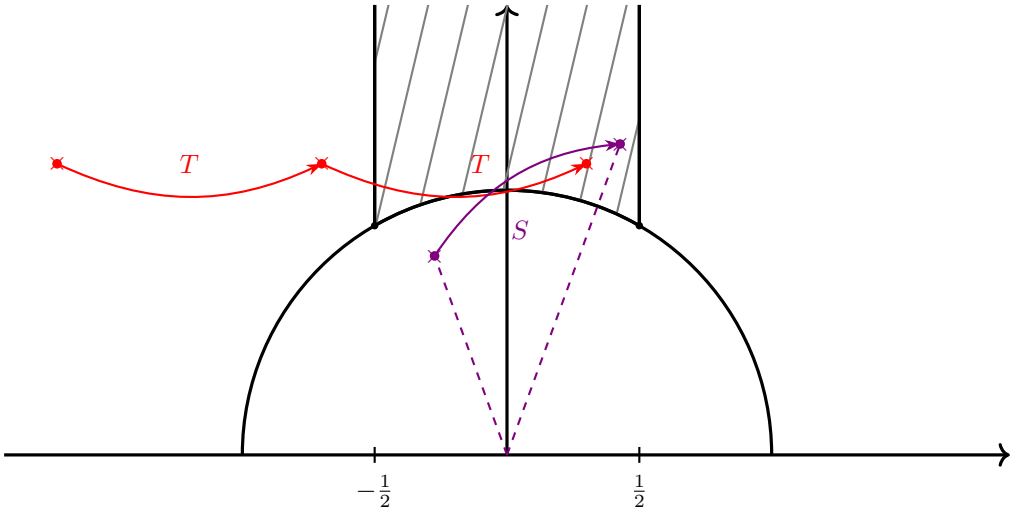


FIGURE 1 – Domaine fondamental et action de T et S

Propriété 2 *Action de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit (à gauche) sur *par* $:A \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}, \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \ z \in \Pi$

II - Le développement

Étape 1 : Un premier lemme

Lemme 3

Soit $z \in \mathbb{H}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $\mathrm{Im}(A \cdot z) \geq \mathrm{Im}(z)$. Alors $|c| \leq \dfrac{1}{\mathrm{Im}(z)}$ et $|d| \leq 1 + |c| \cdot |z|$.

Preuve :

Comme $\mathrm{Im}(A \cdot z) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} \geq \mathrm{Im}(z)$, on a $|cz+d| \leq 1$, d'où :

$$|c| \cdot \mathrm{Im}(z) \leq \underbrace{|\mathrm{Im}(cz+d)|}_{\in \mathbb{R}} \leq 1$$

et

$$|d| \leq |cz+d| + |cz| \leq 1 + |c| \cdot |z|.$$

Étape 2 : Orbite sous l'action de Γ

Posons $\Gamma = \langle S, T \rangle$ où $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (pour mieux visualiser, retenir que $S \cdot z = -\dfrac{1}{z}$ et $T \cdot z = z + 1$).

Si $z \in \mathbb{H}$, on a $\mathrm{Orb}_\Gamma(z) \cap D \neq \varnothing$. Pour cela, considérons

$$\left\{ (c,d) \in \mathbb{Z}^2 : \exists (a,b) \in \mathbb{Z}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z \right) \geq \mathrm{Im}(z) \right\}.$$

Cet ensemble est fini par le lemme, et non vide (contient $(0,1)$). On peut donc considérer $A_1 \in \Gamma$ telle que $\mathrm{Im}(A_1 \cdot z)$ soit maximale. En appliquant T (ou T^{-1}) suffisamment de fois, on obtient $z_2 \in \mathbb{H}$ tel que $\mathrm{Im}(z_2) = \mathrm{Im}(z_1)$ et $-\dfrac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z_2) < \dfrac{1}{2}$.

Si maintenant $|z_2| < 1$, alors $\mathrm{Im}(S \cdot z_2) = \dfrac{\mathrm{Im}(z_2)}{|z_2|^2} > \mathrm{Im}(z_2)$, ce qui est impossible. Donc $|z_2| \geq 1$ et $z_2 \in D$.

Étape 3 : Invariance du domaine fondamental

Lemme 4

Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in D$. Si $(A \cdot z \in \overset{\circ}{D})$ ou $(z \in \overset{\circ}{D}$ et $A \cdot z \in D)$, alors $A = \pm I_2$.

Preuve :

$\star$ Si $\mathrm{Im}(A \cdot z) < \mathrm{Im}(z)$, on pose $z_1 = A \cdot z$, de sorte à avoir $\mathrm{Im}(z_1) \leq \mathrm{Im}(A^{-1} \cdot z_1)$ et $(z_1 \in \overset{\circ}{D}$ et $A^{-1} \cdot z_1 \in D)$ ou $(A^{-1} \cdot z_1 \in \overset{\circ}{D}$ et $z_1 \in D)$.

⋆ On peut donc supposer $\mathrm{Im}(A\cdot z)\geq \mathrm{Im}(z)$. Par le 1er lemme et par la géométrie de D,

$$|c|\leq \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}\leq \frac{2}{\sqrt{3}}<2$$

donc $c\in\{-1,0,1\}$.

∘ $c=0$: $A=\begin{pmatrix}\pm 1 & b\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix}$, impossible si $b\neq 0$ car $\mathrm{Re}(A\cdot z)=\pm\mathrm{Re}(z)\pm b\notin\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

∘ $c=1$: $|z+d|\leq 1$. La géométrie de D permet de dire que deux cas existent :

→ $d=0$ et $|z|\leq 1$, d'où $|z|=1$ (car $z\in D$), mais $A\cdot z=a-\frac{1}{z}\in \overset{\circ}{D}$, ce qui n'est pas possible puisque $\frac{1}{z}$ reste sur le cercle.

→ $d=1$ et $z=j$. Puisque $ad-bc=1$, $a=b+1$, d'où

$$A\cdot j=\frac{aj+(a-1)}{j+1}=\frac{aj+(a-1)}{-j^2}$$

$$=-aj^2+(a-1)j=a+j\notin \overset{\circ}{D}.$$

Les deux cas sont donc impossibles.

∘ $c=-1$: on se ramène à $c=1$ par $-A$.

Étape 4 : Générateurs de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Théorème 5

$\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Preuve :

On a $\Gamma\subset SL_2(\mathbb{Z})$. Soit réciproquement $z\in\overset{\circ}{D}$, $A\in SL_2(\mathbb{Z})$. Par l'étape 2 :

$$\exists B\in\Gamma \text{ telle que } BA\cdot z\in D.$$

Par l'étape 3, $BA=\pm I_2$, d'où $A=\pm B^{-1}\in\Gamma$ car $B^{-1}\in\Gamma$ et $-I_2=S^2$.

III - Remarques

1 - Le développmement est long si on fait toutes les étapes. Il y a cependant moyen de gagner un peu de temps en modifiant la preuve de l'étape 3, en prenant que le cas $z\in\overset{\circ}{D}$, $A\cdot z\in\overset{\circ}{D}$, et en justifiant alors dans l'étape 2 que l'orbite atteint toujours $\overset{\circ}{D}$.

2 - Il faut absolument faire un dessin au tableau, et dans votre annexe. Plusieurs arguments calculatoires peuvent être expédiés par une figure de la situation. Il faut donc bien avoir en tête les opérations géométriques que font T (translation horizontale) et S (homothétie + symétrie par rapport à l'axe imaginaire pur).

3 - Le développement étant long, il n'est pas possible de montrer que l'on a une action. C'est pour cela qu'il ne faut pas hésitez à mettre du vocabulaire lié aux actions, surtout dans la leçon 104.

4 - On a par le passage montré que le domaine fondamental est un pavage de $sous l'action de \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

IV - Références

[Szp] : *Mathématiques L3 Algèbre*, Aviva Szpirglas