Corentin Bergeron ENS Rennes

Accélération de Tchebychev

Magnifique développpement très accès option B (grand merci à Matoumatheux pour la découverte). On part des méthodes itératives usuelles pour construire une méthode semi-itérative accélérant la convergence. Dans la construction, les polynômes de Tchebychev apparaissent naturellement, et on utilise leurs propriétés de base plusieurs fois.

Ce développement ravira nos amis d'option B (mais les autres n'hésitez pas non plus, ne n'est vraiement pas si compliqué que ça les méthode itératives), en particulier pour les leçons 162 et 226. Un recasage en 206 peut aussi être envisagé, puisqu'on manipule des matrices (dont les propriétés utilisent souvent la dim finie) et des polynômes (idem).

I - Le développement

Théorème 1

Soit $\overline{x}$ la solution de $Mx = Nx + b$. On pose $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$. On définit la méthode itérative semi-itérative

$$y_{m+1} = \omega_m\big(By_n - \overline{x} + c - y_{m-1} + \overline{x}\big) + y_{m-1} - \overline{x}$$

où

$$\omega_{m+1} = \frac{1}{1 - \dfrac{\rho^2}{4}\omega_m} \quad .$$
$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{2}{2-\rho^2}$$

Alors en supposant B hermitienne, l'erreur de cette méthode $\varepsilon_m = y_m - \overline{x}$ vérifie :

$$\|\varepsilon_m\| \leq \frac{1}{T_m(1/\rho)}\|\varepsilon_0\|.$$

Preuve :

Étape 1 : Idée de la méthode

Soit $x_{m+1} = Bx_m + c$ la métode itérative usuelle, et considérons $y_m = \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell^{(m)} x_\ell$, avec $\sum_{\ell=0}^{m} a_\ell^{(m)} = 1$.

On pose $e_\ell = x_\ell - \bar{x}$ (erreur de x_l) et $\varepsilon_\ell = y_\ell - \bar{x}$ (erreur de y_l). Puisque $e_0 =_0$, on a $e_\ell = B^\ell e_0$. On a alors :

$$\varepsilon_m = \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell^{(m)}(x_\ell - \bar{x}) = \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell^{(m)} B^\ell e_0 = P_m(B)\, e_0.$$

Le but est de minimiser l'erreur réalisée. On va donc essayer de minimiser sa norme. Comme P_m est un polynôme à coefficients réels,et que B est hermitienne, on a :

$$\|\varepsilon_m\| \leq \|P_m(B)\| \cdot \|e_0\| = \lambda \in \sigma(B)$$

$|\mathrm{P}_m(\lambda)| \cdot \|e_0\|$.

On ne connait cependant pas le spectre de B, il est donc raisonnable d'essayer de trouver P_m minimiseur sur l'intervalle $[-\rho,\ \rho]$, qui par hypothèse contient bien $\sigma(B)$.

Pour des raisons qu'on expliquera après, on va prendre $P_m = \dfrac{T_m(X/\rho)}{T_m(1/\rho)}$.

Étape 2 : calculs

Rappel : $T_{m+1} = 2XT_m - T_{m-1}$.

$$T_{m+1}(1/\rho)\, P_{m+1}(X) = \frac{2X}{\rho} T_m(X/\rho) - T_{m-1}(X/\rho) = \frac{2X}{\rho} T_m(1/\rho)\, P_m(X) - T_{m-1}(1/\rho)\, P_{m-1}(X).$$

On obtient alors en évaluant en B, puis en appliqaunt e_0 :

$$T_{m+1}(1/\rho)\, \varepsilon_{m+1} = \frac{2}{\rho} T_m(1/\rho)\, B\varepsilon_m - T_{m-1}(1/\rho)\, \varepsilon_{m-1}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_{m+1} - \bar{x} &= \frac{2T_m(1/\rho)}{\rho\, T_{m+1}(1/\rho)} \underbrace{(By_m - B\bar{x})}_{By_m - \bar{x} + c} - \underbrace{\frac{T_{m-1}(1/\rho)}{T_{m+1}(1/\rho)}}_{\frac{2T_m(1/\rho)}{\rho T_{m+1}(1/\rho)} - 1} (y_{m-1} - \bar{x}) \\ &= \frac{2T_m(1/\rho)}{\rho T_{m+1}(1/\rho)} \big(By_m - \bar{x} + c - y_{m-1} + \bar{x}\big) + y_{m-1} - \bar{x}. \end{aligned}$$

On en déduit en posant

$$\omega_{m+1} = \frac{2T_m(1/\rho)}{\rho\, T_{m+1}(1/\rho)}$$

la formule

$$\omega_{m+1} = \frac{2T_m(1/\rho)}{\rho\, T_{m+1}(1/\rho)} = \frac{2T_m(1/\rho)}{\rho\big(2\frac{1}{\rho} T_m(1/\rho) - T_{m-1}(1/\rho)\big)} = \frac{1}{1 - \dfrac{\rho^2}{4}\omega_m}$$

avec pour donnée initiale

$$\omega_2 = \frac{2T_1(1/\rho)}{\rho\, T_2(1/\rho)} = \frac{2}{2 - \rho^2}.$$

Finalement, par construction, il vient :

$$\|\varepsilon_m\| \le \left\| \frac{T_m(X/\rho)}{T_m(1/\rho)} \right\|_{\infty,[-\rho,\rho]} \cdot \|e_0\| \le \frac{\|T_m(x)\|_{\infty,[-1,1]}}{T_m(1/\rho)} \|e_0\| \le \frac{1}{T_m(1/\rho)} \|e_0\|.$$

Étape 3 : Pourquoi ce choix de P_m ?

Lemme 2

T_m a $(m+1)$ extrema atteints pour $x'_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{m}\right)$, telq que $T_m(x'_k) = (-1)^k$.

Preuve :

$\forall \theta$, $T_m(\cos\theta) = \cos(m\theta)$ d'où $\left(T_m(\cos\theta)\right)' = m\sin(\theta m)$ et la dérivée s'annule donc pour les $\dfrac{k\pi}{m}$.

De plus $T_m\left(\cos\left(\dfrac{k\pi}{m}\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

Propriété 3

Soit $|\alpha| > 1$ et $P \in F_m = \{P \in \mathbb{R}_m[X] : P(\alpha) = \beta\}$. On a

$$\beta\frac{T_m(x)}{T_m(\alpha)} \in F_m$$

et

$$\left\|\beta\frac{T_m}{T_m(\alpha)}\right\|_{\infty,[-1,1]} = P \in F_m$$

$\|P\|_{\infty,[-\rho,\rho]}$.

Preuve :

Par l'absurde, soit P tel que $\max_{|} P(x)| < \left|\dfrac{\beta}{T_m(\alpha)}\right|$. Alors

$$R = \beta\frac{T_m}{T_m(\alpha)} - P \in \mathbb{R}_m[X], \quad \text{s'annule en } \alpha.$$

De plus, $\dfrac{T_m(\alpha)\,R(x'_k)}{\beta}$ a le signe de $(-1)^k$, donc possède au moins m racines dans $[-1,1]$, ce qui donne un trop grand nombre de racines, absurde.

Dans notre problème initial, on cherche P_m qui minise la norme sup sur $[-\rho,\rho]$, et tel que $P_m(1) = 1$ (condition sur les $a_i^{(m)}$). En posant la varaible $Y = \rho X$, on cherche un polynôme minimisant la norme sup sur $[-1,1]$ et tel que sa valeur en $1/\rho$ vaille 1. La propriété permet alors de retrouver la forme que l'on a utilisé.

II - Accélération

Lorsqu'on a des convergences géométriques, l'important est de connaître la constante de convergence (celle qui est à la puissance n). Le but d'une accélération de convergence est alors de trouver une nouvelle méthode itérative, à partir de la première, qui va faire diminuer cette constante de convergence (et donc de converger plus vite).

Dans notre cas, les méthode itérative usuelles convergent avec une constante au plus $\rho + \epsilon$, pour un ϵ aussi petit que l'on veut (cela provient de la preuve de vonvergence + du fait qu'on peut choisir une norme approchant le rayon spectral à ϵ près).

Estimons $T_m\,(1\rho) =: u_m$. On sait qu'on a la relation de récurrence :

$$u_{m+2} = \frac{2}{\rho}u_{m+1} - u_m.$$

Son équation caractéristique est $X^2 - \frac{2}{\rho}X + 1 = 0$, dont les racines sont :

$$\frac{2 + \rho\sqrt{\frac{4}{\rho^2} - 4}}{2\rho} = \frac{1 + \sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \qquad \text{et} \qquad \frac{1 - \sqrt{1-\rho^2}}{\rho}.$$

On a donc (à une constante multiplicative près) :

$$u_m \underset{m\to\infty}{\sim} \left(\frac{1 + \sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)^m.$$

On a ainsi, asymptotiquement, une vitesse de convergence géométrique de constante

$$\frac{\rho}{1 + \sqrt{1-\rho^2}} < \rho.$$

On a donc bien une accélération (asymptotique) de la convergence.

III - Remarques

1 - J'ai présenté dans un oral blanc ce développement pour la leçon 162. Bien que j'aie cafouillé dans la première partie (je me suis trompé dans les notations, ce qui a rendu incompréhensible la construction de la méthode), j'ai pu me rattrapé dans la suite en me rendant compte dans les calculs que qulque chose clochait. Le jury a ainsi apprécié que je sache rebondir et que je ne récite tout simplement pas par coeur mon développement. Côté questions, il y en a eu plusieurs pour clarifier le procédé (ils n'avaient jamais vu le dév), notamment le processus qui amène à prendre P_m qui minimise la norme infinie (utilisation du côté hermition, spectre de $P_m(B)$, ...), puis quelques questions sur le choix de P_m, et comment les polynômes de Tchebychec et leurs propriétés intervenaient (on utilise à la fois la relation de récurrence, et la définition avec les cosinus).

2 - C'est un développement qui n'est pas aussi calculatoire qu'il n'y paraît. Il faut juste faire attention à bien poser les éléments, puis les calculs se font naturellement. Tout montrer est je pense trop long. Pour ma part, je pense qu'il vaut mieux bien présenter la construction, faire les calculs et sauter la justification du choix de P_m, et le faire à la fin si jamais il y a le temps (et même s'il y a le temps, je pense qu'il faut juste écrire la propriété, et ne pas la démontrer).

IV - Références

[Las] : *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur - Tome 1 et 2*, Patrick Lascaux